Teoría de Juegos

- Juegos bipersonales de suma nula
- Juegos semi-infinitos

Mª Enriqueta Vercher González
Universitat de València

Índice

- Introducción
- Juego bipersonal de suma nula
  - Pares de equilibrio
  - Estrategias mixtas
  - Teorema del Minimax
  - Determinación de estrategias óptimas
- Juegos semi-infinitos
- Referencias

Teoría de Juegos

- La Teoría de Juegos es una colección de modelos matemáticos formulados para estudiar la toma de decisiones en ambiente de conflicto y/o cooperación.
- Un juego consta de n jugadores que deben elegir de una lista de alternativas sobre las que tienen diferentes preferencias (Von Neumann and Morgenstern, 1944)
- Un juego puede describirse mediante un árbol de decisión (forma extensiva) o mediante la descripción de todas las estrategias puras de cada jugador y los pagos asociados a cada estrategia pura (forma normal).

Ejemplos

- Juegos n-personales
- Juegos bipersonales
  - finitos
    - rectangulares de suma nula
    - cooperativos: dilema del prisionero
    - multi-etápicos
      - Juegos de supervivencia
      - Juegos estocásticos
  - infinitos
    - Juegos sobre el cuadrado unidad
  - semi-infinitos

Forma normal de un juego

- Una estrategia pura $\pi_i \in E_i$ para un jugador J_i, i=1,…,n es un programa completo de acción, que en cualquier instante del juego dicta la elección a tomar.
- La función de pago a cada jugador explicita el pago que recibe cada jugador para cada conjunto de estrategias puras:

P_i: $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n \rightarrow \Re$ i=1,…, n

- Un conjunto de estrategias π' está en equilibrio si y solo si $\forall \pi_j \in E_j$ se tiene que $P_j(\pi_j, \pi'_{(n-1)}) \leq P_j(\pi')$, j=1…n

Un jugador racional no deseará separarse de este conjunto

$$\forall \pi_1 \in E_1 \; P_1(\pi_1, \overline{\pi}_2) \leq P_1(\overline{\pi}) \quad y \quad \forall \pi_2 \in E_2 \; P_2(\overline{\pi}_1, \pi_2) \leq P_2(\overline{\pi})$$

Juego bipersonal de suma nula

- Un juego bipersonal es de suma nula si y solo si para todo $\pi \in E_1 \times E_2 \quad P_1(\pi) + P_2(\pi) = 0$
- Un juego bipersonal de suma nula (rectangular) queda definido por los dos conjuntos de estrategias puras y la función de pago al jugador J_1, respectivamente:

$$E_1 = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_m\}, \quad E_2 = \{\beta_1, \cdots, \beta_n\} \quad y \quad P(\alpha_i, \beta_j) = a_{ij}$$

- La función de pago puede representarse mediante una matriz (m×n), siendo J_1 (I) el jugador fila y J_2 (II) el jugador columna.

Juego bipersonal de suma nula

- Los pares de equilibrio (α_{i0}, β_{j0}) verifican que:

$$\forall i = 1,\ldots,m \quad a_{ij_0} \leq a_{i_0 j_0} \quad y \quad \forall j = 1,\ldots,n \quad -a_{i_0 j} \leq -a_{i_0 j_0}$$

- Siendo el elemento $a_{i_0 j_0}$ el máximo de la columna (j_0) y el mínimo de la fila (i_0), es decir es un punto de silla de la función de pago del jugador I:

$$\forall i = 1,\ldots,m \quad a_{ij_0} = P(\alpha_i, \beta_{j_0}) \leq a_{i_0 j_0} \leq a_{i_0 j} = P(\alpha_{i_0}, \beta_j) \quad \forall j = 1,\ldots,n$$

- Los pares de equilibrio son equivalentes e intercambiables, y conducen al pago de equilibrio $a_{i_0 j_0}$ que se conoce como valor del juego.

Juegos sin puntos de silla

- Para juegos sin puntos de silla no se puede decidir que estrategia dará mejor resultado al jugador. No se da una situación de equilibrio y el juego no tiene valor.
- **Ejemplo:** Consideremos un juego donde $E_1 = \{\alpha_1, \alpha_2\}, \quad E_2 = \{\beta_1, \beta_2\}$ con matriz de pagos $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$
  - El beneficio máximo que puede asegurarse I
  $$v_I' = \max_{i=1,..,m} \left\{ \min_{j=1,..,n} a_{ij} \right\} = \max\{2,1\} = 2$$
  - El tope a la ganancia de I que puede imponer II
  $$v_{II}' = \min_{j=1,..,n} \left\{ \max_{i=1,..,m} a_{ij} \right\} = \min\{4,3\} = 3$$

Estrategias mixtas

- Una estrategia mixta es una distribución de probabilidad sobre el conjunto de estrategias puras. Respectivamente:

$$X = \left\{ x \in \Re^m : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \right\} e\, Y = \left\{ y \in \Re^n : y_j \geq 0, \sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \right\}$$

- El pago esperado si se eligen las estrategias *x* e *y* es

$$P(x,y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i a_{ij} y_j = x^T A y$$

- El valor maximin v_I y la estrategia maximin $x \in X$ son, resp.

$$v_I = \max_{x \in X} v(x) = \max_{x \in X} \{\min_{j=1,..,n} P(x, \beta_j)\} \quad y \quad v(x) = v_I$$

- El valor minimax v_{II} y la estrategia minimax $y \in Y$ son, resp.

$$v_{II} = \min_{y \in Y} v(y) = \min_{y \in Y} \{\max_{i=1,..,m} P(\alpha_i, y)\} \quad y \quad v(y) = v_{II}$$

Estrategias mixtas

- El valor maximin v_I es la ganancia esperada que puede asegurarse el jugador I si elige una estrategia maximin $x \in X$, tal que $v(x)=v_I$.
- El valor minimax v_{II} es el tope a la ganancia esperada del jugador I si elige una estrategia minimax $y \in Y$, tal que $v(y)=v_{II}$. En particular, $v(y_0)$ es la pérdida máxima del jugador II si elige una estrategia $y_0 \in Y$.
- Se tiene, además, que: $v_I' \leq v_I \leq v_{II} \leq v_{II}'$

Teorema del Minimax

- Un resultado fundamental en la Teoría de Juegos es el Teorema del Minimax $v_I = v_{II}$ mediante el cual se establece la optimalidad de las estrategias maximin y minimax para ambos jugadores.
- La primera demostración de este teorema se debe a Von Neumann (1928), que utilizó un teorema de separación estricta y un teorema de alternativa (véase Owen, 1968).
- En el libro de Parthasarathy and Raghavan (1971) puede encontrarse una colección exhaustiva de teoremas generales del minimax.

Teorema General del Minimax

Sean $X \in \Re^m, Y \in \Re^n$ dos conjuntos compactos convexos no vacíos y sea $f : X \times Y \to \Re$

Sea f_x(.) una función convexa y sc inf para todo $x \in X$,

$f_x : Y \to \Re,\ f_x(y) = f(x,y)$

Sea f_y(.) una función cóncava y sc sup para todo $y \in Y$,

$f_y : X \to \Re,\ f_y(x) = f(x,y)$

Entonces, se tiene que:

$$\max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x,y) = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x,y)$$

Teorema General del Minimax

- Se sigue de la demostración que existe un punto de silla (x^0, y^0) de la función $f(x,y)$.
- Para un juego rectangular (X,Y,A) con función de pago $f(x,y)=x^TAy$, se demuestra que x^0 es una estrategia maximin e y^0 es una estrategia minimax, cumpliéndose que $$\max_{x\in X} f(x,y^0) = v = \min_{y\in Y} f(x^0,y)$$
- Los conjuntos de estrategias óptimas son:

$$\overline{X} = \left\{ \overline{x} \in \Re^m : \overline{x}_i \geq 0, \sum_{i=1}^{m} \overline{x}_i = 1, \overline{x}^T A \geq (v,\dots v) \right\} e\, \overline{Y} = \left\{ \overline{y} \in \Re^n : \overline{y}_j \geq 0, \sum_{j=1}^{n} \overline{y}_j = 1, A\overline{y} \leq (v,\dots v)^T \right\}$$

Determinación de estrategias óptimas

- Dado que los conjuntos de estrategias óptimas son poliedros acotados no vacios, para su determinación será suficiente calcular las estrategias óptimas básicas.
- Teorema (Shapley and Snow, 1950) Para un juego rectangular (X,Y,A) con valor $v\neq 0$. Las estrategias óptimas $(\bar{x},\bar{y})\in X\times Y$ son básicas si, y solo si, existen $S\subset\{1,\ldots,m\}$ y $T\subset\{1,\ldots,n\}$ tales que la submatriz A_{ST} es regular,

$$\bar{x}_i = 0 \ \forall i \notin S \ y \ \bar{x}^T A_j = v \ \forall j \in T,$$

$$\bar{y}_j = 0 \ \forall j \notin T \ y \ A_i \bar{y} = v \ \forall i \in S.$$

Determinación de estrategias óptimas

- Aplicando el siguiente procedimiento iterativo se determina tanto el valor del juego como las estrategias óptimas básicas:
- Calcular todas las submatrices M (*s*x*s*) regulares de A
- Comprobar si se satisfacen simultáneamente:

$$(i)\ v = \frac{1}{u_s^T M^{-1} u_s}$$

$$(ii)\ \text{Para } x_s^T = v u_s^T M^{-1}, \text{ completando con ceros } x^T A \geq u_n^T v$$

$$(iii)\ \text{Para } y_s^T = v u_s^T M^{-1}, \text{ completando con ceros } Ay \leq u_m v$$

- Tendríamos una solución óptima, siendo básicas las estrategias óptimas obtenidas.

Juegos rectangulares y PL

- La equivalencia existente entre un juego rectangular y un par de programas lineales duales simétricos fue establecida por Dantzig en 1951.
- Determinar las estrategias óptimas de los jugadores I y II se sigue de la resolución de los programas

$$
\begin{array}{llll}
(I) & Min & x^T u_m \\
 & s.a. & x^T A \geq u_n^T \\
 & & x \geq 0_m
\end{array}
\qquad
\begin{array}{llll}
(II) & Max & u_m^T y \\
 & s.a. & Ay \leq u_m \\
 & & y \geq 0_n
\end{array}
$$

- En particular, resulta más sencillo obtener las estrategias optimas resolviendo el PL asociado al jugador II.

Juegos semi-infinitos

- Un juego bipersonal de suma nula semi-infinito está definido por un conjunto de vectores $\{a_t, t \in T\} \subset \Re^n$
- Los conjuntos de estrategias puras son $E_1 = T$ y $E_2 = \{1, \ldots, n\}$
- La matriz semi-infinita de pagos seria $P(t, j) = a_{tj}$
- Este tipo de juegos ha sido tratado por Soyster (1975), cuando T es numerable, aplicando resultados de dualidad sobre conos.
- Tijs (1979) aplica técnicas de aproximación, usando subprogramas lineales finitos, para dar una demostración alternativa del teorema del minimax y prueba que el jugador II siempre tiene estrategias óptimas.

Juegos semi-infinitos lineales

Si los jugadores I y II eligen una distribución de probabilidad discreta sobre sus correspondientes conjuntos de estrategias puras, se sigue que los conjuntos de estrategias mixtas son:

Jugador I: $\Gamma=\{\lambda= (\lambda_t)_{t \in T} /$ nº finito de $\lambda_t \neq 0$, $\lambda_t \geq 0$ y $\sum_{t \in T} \lambda_t = 1\}$

Jugador II: $Y:=\{y \in R^n / \sum_{i=1,..,n} y_i = 1, y_i \geq 0\}$

Función de pago del jugador I:

$$P(\lambda, y)= \sum_{t \in T} \lambda_t a_t' y \qquad \lambda \in \Gamma, y \in Y$$

Los valores maximin y minimax:

$$v_I:=\sup_{\lambda \in \Gamma}\{\min_{j=1,..,n} P(\lambda, e^j)\} \quad v_{II}:= \inf_{y \in Y} \{\sup_{t \in T} a_t' y \}$$

Juegos semi-infinitos lineales

Aplicando el Teorema de alternativa generalizado de Stiemke: (I) $\Leftrightarrow$ no (II) (López y Vercher, 1983), siendo

$$(I)\ \left\{a_t^T x \leq 0, t \in T\right\} \text{tiene una solución } x^0 \text{ tal que } a_t^T x^0 \neq 0 \text{ para algun t}$$

$$(II)\ 0_n \in \operatorname{int} r\left(co\left\{a_t, t \in T\right\}\right)$$

se demuestra que:

- Teorema del minimax. Cualquier juego semi-infinito lineal verifica $v_I = v_{II}$.
- Para cualquier juego con valor finito el jugador II siempre tiene estrategias óptimas.
- Condiciones adicionales para que el jugador I tenga estrategias óptimas. Por ejemplo, que el conjunto de vectores $\{a_t, t \in T\}$ sea compacto (Goberna et al, 1984).

Juegos semi-infinitos convexos

Sea $F_T=\{f_t,\ t \in T\}$ familia de funciones convexas. Una estrategia pura del jugador I consiste en elegir una función de F_T.

Los conjuntos de estrategias mixtas se definen:

- Jugador I: $\Gamma=\{\lambda= (\lambda_t)_{t \in T} / \text{nº finito } \lambda_t \neq 0,\ \lambda_t \geq 0,\ \sum_{t \in T} \lambda_t=1\}$
- Jugador II: C:=conjunto cerrado convexo no vacio de R^n

Función de pago del jugador I:

$$P(\lambda, x)= \sum_{t \in T} \lambda_t f_t(x) \qquad \lambda \in \Gamma,\ x \in C$$

Los valores maximin y minimax son:

$$v_I:=\sup_{I \in G}\{\inf_{x\in C} P(\lambda, x)\} \qquad v_{II}:= \inf_{x\in C} \{\sup_{t \in T} f_t(x)\}$$

Teorema del Minimax

Condición (R). Las funciones convexas en F_T no tienen ninguna dirección de recesión común con las direcciones de recesión de C, i.e. $0^+C \cap (\cap_{t \in T} \text{rec } f_t) = \{0\}$

Teorema (López y Vercher, 1986) Sea (F_T, C) un juego semi-infinito que verifique la condición (R), entonces una y solo una de las siguientes alternativas se cumple:

- Existe un vector $x \in C$ tal que $f_t(x) \leq 0$ para todo $t \in T$
- Existen $\lambda = (\lambda_t)_{t \in T}$/nº finito $\lambda_t \neq 0$, $\lambda_t \geq 0$, tales que para algun $\xi > 0$ se tiene que $\sum_{t \in T} \lambda_t f_t(x) \geq \xi$, para todo $x \in C$

Teorema del Minimax

Teorema del minimax (López y Vercher, 1986)

Para cualquier juego semi-infinito (F_T, C) que verifique la condición (R): $v_I = v_{II}$.

Se ha demostrado que:

- Para cualquier (R)-juego semi-infinito, cuyo valor del juego es finito, el jugador II siempre tiene estrategias óptimas.
- En las condiciones anteriores, si el conjunto de vectores $L(F_T)$ es compacto (por ejemplo), también el conjunto de estrategias óptimas del jugador I es no vacio.

Siendo $L(F_T) = \left\{ \begin{bmatrix} u_t \\ f_t^*(u_t) \end{bmatrix}, u_t \in dom(f^*), t \in T \right\} \subset \Re^{n+1}$

Estrategias óptimas

Las estrategias óptimas de los juegos (F_T, C) que verifican la condición (R) y tienen valor cero admiten una curiosa interpretación geométrica:

- Los únicos hiperplanos que separan $L(F_T)$ e hipo I_C, siendo $I_C(u) := \inf_{x \in C} u'x$, tienen la ecuación

$$[x^*, \quad -1]\begin{bmatrix} u \\ \rho \end{bmatrix} = 0$$

donde x* es una estrategia óptima de II.

- Si $L(F_T)$ es compacto: hipo $I_C \cap co(L(F_T)) \neq \emptyset$. Los vectores que pertenecen a esta intersección son

$$\begin{bmatrix} u \\ \rho \end{bmatrix} = \sum_{t \in T} \sum_{u_t \in dom(f_t^c)} \lambda_{u_t} \begin{bmatrix} u_t \\ f_t^c(u_t) \end{bmatrix} \qquad \lambda_t = \sum_{u_t \in dom(f_t^c)} \lambda_{u_t}$$

y $\lambda = (\lambda_t)_{t \in T}$ es un estrategia óptima del jugador I.

Estrategias puras óptimas

Si T es el conjunto de estrategias puras del jugador I. Si T es un conjunto compacto convexo de R^m hemos caracterizado la existencia de estrategias puras óptimas:

- Sea (F_T, C) un juego que verifica la condición (R), tal que
  (i) $f_t(x)$ es cóncava en t y cont sobre T, para $x \in C$.

Entonces, el valor del juego es finito y el jugador I tiene estrategias puras óptimas.

- Sea (F_T, C) un juego convexo, siendo C compacto tal que
  (i) $f_t(x)$ es continua sobre T, para cada $x \in C$
  (ii) $T(x):=\{t \in T / f_t(x)=\max_{t \in T} f_t(x)\}$ es convexo.

Entonces, el valor del juego es finito y el jugador I tiene estrategias puras óptimas.

Referencias

- G. B. Dantzig, en *Activity Analysis of Production and Allocation*, Koopmans (ed), Wiley 1951.
- M. A. Goberna, M.A.Lopez . J. Pastor and E. Vercher (1984) *Nieuw Archief voor Wiskunde* (4) 2, 218-234.
- M. A. Lopez and E. Vercher (1983) *Cuadernos de Bioestadística y sus Aplicaciones Informáticas* I, 260-266.
- M. A. Lopez and E. Vercher (1986) *Journal of Optimization Theory and Applications* 50, 289-312
- G. Owen, *Game Theory*, Saunders,1968.
- T. Parthasarathy and T. E. S. Raghavan, *Some topics in two-person games*, American Elsevier 1971.
- R. T. Rockafellar, *Convex Analysis*, Princeton Univ. Press, 1970.
- L. S. Shapley and R. N. Snow, en *Contributions to the theory of games*, vol. I, Kuhn and Tucker (eds), Princeton Univ. Press, 1950.
- A. L. Soyster (1975) *Management Science* 21, 806-812
- S. H. Tijs (1979) *Nieuw Archief voor Wiskunde* 27, 197-214
- J. Von Neumann (1928) *Mathematische Annalen* 100, 295-320
- J. Von Neumann and O. Morgenstern, *Theory of games and Economic behavior*, Princeton Univ. Press, 1970.