Optimización infinita y sus fundamentos

Miguel A. Goberna

Departamento de Estadística e Investigación Operativa.

Homenaje a Marco A. López en su 60^o aniversario
UA, 20/02/2010

Guión

- Publicaciones de M.A. López

Guión

- Publicaciones de M.A. López
- Introducción

Guión

- Publicaciones de M.A. López
- Introducción
- Sistemas lineales infinitos

Guión

- Publicaciones de M.A. López
- Introducción
- Sistemas lineales infinitos
- Optimización infinita lineal

Guión

- Publicaciones de M.A. López
- Introducción
- Sistemas lineales infinitos
- Optimización infinita lineal
- Sistemas convexos infinitos

Guión

- Publicaciones de M.A. López
- Introducción
- Sistemas lineales infinitos
- Optimización infinita lineal
- Sistemas convexos infinitos
- Optimización infinita convexa

Guión

- Publicaciones de M.A. López
- Introducción
- Sistemas lineales infinitos
- Optimización infinita lineal
- Sistemas convexos infinitos
- Optimización infinita convexa
- Problemas no convexos

Publicaciones de M.A. López sobre optimización infinita y sus fundamentos

Publicaciones

GLMV95: M.A. Goberna, M.A.López, J.A. Mira y J. Valls, On the Existence of Solutions for Linear Inequality Systems, *J. Math. Anal. Appl.* 192 (1995) 133-150.
LMG98: M.A. López, J.A. Mira y G. Torregrosa, On the Stability of Infinite-Dimensional Linear Inequality Systems, *Numer. Funct. Anal. Optim.* 19 (1998) 1065-1077.
GLW01: M.A. Goberna, M.A. López y S.Y. Wu, Separation by hyperplanes: a linear semi-infinite programming approach, en *Semi-Infinite Programming: Recent Advances*, Kluwer, 2001, 255-269, 2001.
DGL06: N. Dinh, M.A. Goberna y M.A. López, From linear to convex systems: Consistency, Farkas Lemma and applications. *J. Convex Anal.* 13 (2006) 113-133.

Publicaciones

DGLS07: N. Dinh, M.A. Goberna, M.A. López y T.Q. Son, New Farkas-type constraint qualifications in convex infinite programming, *ESAIM: Control, Optim. Calc. Var.* 13 (2007) 580-597.

GJL08: M.A. Goberna, V. Jeyakumar y M.A. López, Necessary and sufficient constraint qualifications for systems of infinite convex inequalities, *J. Nonlinear Anal.* 68 (2008) 1184-1194.

HLZ08: Hantoute, A., López, M. A., Zălinescu, C., Subdifferential calculus rules in convex analysis: a unifying approach via pointwise supremum functions, *SIAM J. Optim.* 19 (2008), 863-882.

CLMP09: M.J. Cánovas, M.A. López, B.S. Mordukhovich y J. Parra, Variational analysis in semi-infinite and infinite programming, I: Stability of linear inequality systems of feasible solutions, *SIAM J. Optim.* 20 (2009) 1504-1526.

Publicaciones

LFLL09: C. Li, D. Fang, G. López y M.A. López, Stable and total Fenchel duality for convex optimization problems in locally convex spaces, *SIAM J. Optim.* 20 (2009) 1032-1051.

LWLQ10: M.A. López, S.Y. Wu, C. Ling y L. Qi, A mathematical programming approach to strong separation in normed spaces, *J. Convex Anal.* 17 (2010).

LV10: M.A. López y M. Volle, A formula for the set of optimal solutions of a relaxed minimization problem, *J. Convex Anal.* 17 (2010).

DGL10: N. Dinh, M.A. Goberna y M.A. López, On the stability of the feasible set in optimization problems, *SIAM J. Optim.*, en prensa.

DGLV10: N. Dinh, M.A. Goberna, M.A. López y M. Volle, Convex inequalities without constraint qualification nor closedness condition, and their applications in optimization, *Set-Valued and Var. Anal.*, en prensa.
HLV10: J.-B. Hiriart-Urruty, M.A. López, M. Volle, The $\varepsilon-$strategy in variational analysis. Illustration with the closed convexification of a function, *Revista Matemática Iberoamericana*, en prensa.

Introducción

- En lo que sigue X es, por defecto, un espacio vectorial topológico localmente convexo y Hausdorff. Cualquier espacio normado es l.c.H.

Introducción

- En lo que sigue X es, por defecto, un espacio vectorial topológico localmente convexo y Hausdorff. Cualquier espacio normado es l.c.H.
- Las formas lineales continuas forman el *dual topológico* X^*. La operación $\langle \cdot, \cdot \rangle : X^* \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\langle x^*, x \rangle = x^* (x)$ se llama *producto de dualidad* o *acoplamiento canónico*.

Introducción

- En lo que sigue X es, por defecto, un espacio vectorial topológico localmente convexo y Hausdorff. Cualquier espacio normado es l.c.H.
- Las formas lineales continuas forman el *dual topológico* X^*. La operación $\langle \cdot, \cdot \rangle : X^* \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\langle x^*, x \rangle = x^*(x)$ se llama *producto de dualidad* o *acoplamiento canónico*.
- Consideramos X^* dotado de la *topología débil estrella* sobre X^*, que tiene como subbase de entornos de 0 los conjuntos de la forma $\{x^* \in X^* : \langle x^*, x \rangle \leq \varepsilon\}$, para $x \in X$ y $\varepsilon > 0$.

Introducción

- En lo que sigue X es, por defecto, un espacio vectorial topológico localmente convexo y Hausdorff. Cualquier espacio normado es l.c.H.
- Las formas lineales continuas forman el *dual topológico* X^*. La operación $\langle \cdot, \cdot \rangle : X^* \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\langle x^*, x \rangle = x^* (x)$ se llama *producto de dualidad* o *acoplamiento canónico*.
- Consideramos X^* dotado de la *topología débil estrella* sobre X^*, que tiene como subbase de entornos de 0 los conjuntos de la forma $\{x^* \in X^* : \langle x^*, x \rangle \leq \varepsilon\}$, para $x \in X$ y $\varepsilon > 0$.
- GLW01 y LWLQ10 proponen métodos numéricos (basados en PNL y PSI) para la separación y la separación fuerte de pares de subconjuntos disjuntos en espacios normados.

- $\mathbb{R}^{(S)}$ denota el espacio vectorial de las funciones de S en $\mathbb{R}$ con imagen 0 salvo en un subconjunto finito (el soporte).

- $\mathbb{R}^{(S)}$ denota el espacio vectorial de las funciones de S en $\mathbb{R}$ con imagen 0 salvo en un subconjunto finito (el soporte).
- $\mathbb{R}_+^{(S)} = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^{(S)} : \lambda_s \geq 0 \ \forall s \in S \right\}$ es el *cono positivo* en $\mathbb{R}^{(S)}$.

Introducción

- $\mathbb{R}^{(S)}$ denota el espacio vectorial de las funciones de S en $\mathbb{R}$ con imagen 0 salvo en un subconjunto finito (el soporte).
- $\mathbb{R}_+^{(S)} = \left\{\lambda \in \mathbb{R}^{(S)} : \lambda_s \geq 0 \ \forall s \in S\right\}$ es el *cono positivo* en $\mathbb{R}^{(S)}$.
- Con esta notación, dado $\{d_s, s \in S\} \subset X$,

$$\operatorname{cone}\{d_s, s \in S\} = \left\{\sum_{s \in S} \lambda_s d_s : \lambda \in \mathbb{R}_+^{(S)}\right\}.$$

Introducción

- Dada $h : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, el *dominio* y el *epigrafo* de h son

$$\operatorname{dom} h = \{x \in X : h(x) < +\infty\},$$

$$\operatorname{epi} h = \{(x, \gamma) \in X \times \mathbb{R} : h(x) \leq \gamma\}.$$

Introducción

- Dada $h : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, el *dominio* y el *epigrafo* de h son

$$\mathrm{dom}\; h = \{x \in X : h(x) < +\infty\},$$

$$\mathrm{epi}\, h = \{(x, \gamma) \in X \times \mathbb{R} : h(x) \leq \gamma\}.$$

- La *función conjugada* de h es $h^* : X^* \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ tal que

$$h^*(u) = \sup\{\langle u, x\rangle - h(x) : x \in \mathrm{dom}\; h\}.$$

Introducción

- Dada $h : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, el *dominio* y el *epigrafo* de h son

$$\operatorname{dom} h = \{x \in X : h(x) < +\infty\},$$

$$\operatorname{epi} h = \{(x, \gamma) \in X \times \mathbb{R} : h(x) \leq \gamma\}.$$

- La *función conjugada* de h es $h^* : X^* \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ tal que

$$h^*(u) = \sup\{\langle u, x\rangle - h(x) : x \in \operatorname{dom} h\}.$$

- Si h es convexa propia sci (abreviadamente, $h \in \Gamma(X)$), $h^{**} = h$. Entonces, h es el supremo de funcionales afines continuos y los conjuntos de nivel inferior de h se linealizan:

$$h(x) = \sup\{\langle u, x\rangle - h^*(u) : u \in \operatorname{dom} h^*\}$$

$$h(x) \leq 0 \iff \langle u, x\rangle \leq h^*(u), \; \forall u \in \operatorname{dom} h^*.$$

Introducción

- La *función indicatriz* de $D \subset X$ es
$$\delta_D(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in D, \\ +\infty, & \text{si } x \notin D. \end{cases}$$

Introducción

- La *función indicatriz* de $D \subset X$ es
$$\delta_D(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in D, \\ +\infty, & \text{si } x \notin D. \end{cases}$$
- La *función soporte* de D es δ_C^*, i.e.,

$$\delta_D^*(u) = \sup_{x \in D} \langle u, x \rangle \; \forall u \in X^*.$$

Introducción

- La *función indicatriz* de $D \subset X$ es
$$\delta_D(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in D, \\ +\infty, & \text{si } x \notin D. \end{cases}$$
- La *función soporte* de D es δ_C^*, i.e.,
$$\delta_D^*(u) = \sup_{x \in D} \langle u, x \rangle \; \forall u \in X^*.$$
- El *subdiferencial* de f en $x \in \mathrm{dom}\, f$ es
$$\partial f(x) = \{u \in X^* : f(y) \geq f(x) + \langle u, y - x \rangle \;\; \forall y \in \mathrm{dom}\, f\}.$$

Introducción

- La *función indicatriz* de $D \subset X$ es
$\delta_D(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in D, \\ +\infty, & \text{si } x \notin D. \end{cases}$
- La *función soporte* de D es δ_C^*, i.e.,

$$\delta_D^*(u) = \sup_{x \in D} \langle u, x \rangle \; \forall u \in X^*.$$

- El *subdiferencial* de f en $x \in \operatorname{dom} f$ es

$$\partial f(x) = \{u \in X^* : f(y) \geq f(x) + \langle u, y - x \rangle \;\; \forall y \in \operatorname{dom} f\}.$$

- El *cono normal* a D en x es

$$N_D(x) = \{u \in X^* : \langle u, y - x \rangle \leq 0 \; \forall y \in D\} = \partial \delta_D(x).$$

Sistemas lineales infinitos

Sistemas lineales infinitos

- Consideramos sistemas de la forma

$$\sigma := \{\langle a_t, x\rangle \leq b_t,\ t \in T\}, \tag{1}$$

donde $a_t \in X^*$ y $b_t \in \mathbb{R}$, $\forall t \in T$ (arbitrario).

Sistemas lineales infinitos

- Consideramos sistemas de la forma

$$\sigma := \{\langle a_t, x\rangle \leq b_t,\ t \in T\}, \tag{1}$$

  donde $a_t \in X^*$ y $b_t \in \mathbb{R}$, $\forall t \in T$ (arbitrario).
- Los datos que definen σ son los pares $(a_t, b_t) \in X^* \times \mathbb{R}$ (espacio dotado de la topología producto).

Sistemas lineales infinitos

- Consideramos sistemas de la forma

$$\sigma := \{\langle a_t, x\rangle \leq b_t,\ t \in T\}, \tag{1}$$

  donde $a_t \in X^*$ y $b_t \in \mathbb{R}$, $\forall t \in T$ (arbitrario).
- Los datos que definen σ son los pares $(a_t, b_t) \in X^* \times \mathbb{R}$ (espacio dotado de la topología producto).
- El *conjunto solución* de σ es

$$F = \{x \in X : \langle a_t, x\rangle \leq b_t,\ t \in T\}.$$

Sistemas lineales infinitos

- Consideramos sistemas de la forma

$$\sigma := \{\langle a_t, x\rangle \leq b_t,\ t \in T\}, \tag{1}$$

donde $a_t \in X^*$ y $b_t \in \mathbb{R}$, $\forall t \in T$ (arbitrario).

- Los datos que definen σ son los pares $(a_t, b_t) \in X^* \times \mathbb{R}$ (espacio dotado de la topología producto).
- El *conjunto solución* de σ es

$$F = \{x \in X : \langle a_t, x\rangle \leq b_t,\ t \in T\}.$$

- El *cono característico* de σ es

$$K = \operatorname{cone}\{(a_t, b_t),\ t \in T; (0, 1)\}.$$

- Teorema de existencia (Zhu, 1966):

$$F \neq \emptyset \Leftrightarrow (0,-1) \notin \operatorname{cl} K$$

Sistemas lineales infinitos

- Teorema de existencia (Zhu, 1966):

$$F \neq \emptyset \Leftrightarrow (0, -1) \notin \operatorname{cl} K$$

- Lema de Farkas (Zhu, 1966): Sea $F \neq \emptyset$ y sean $a \in X^*$ y $b \in \mathbb{R}$. Entonces,

$$\langle a, x \rangle \leq b \; \forall x \in F \Leftrightarrow (a, b) \in \operatorname{cl} K \tag{2}$$

Sistemas lineales infinitos

- Teorema de existencia (Zhu, 1966):

$$F \neq \emptyset \Leftrightarrow (0, -1) \notin \operatorname{cl} K$$

- Lema de Farkas (Zhu, 1966): Sea $F \neq \emptyset$ y sean $a \in X^*$ y $b \in \mathbb{R}$. Entonces,

$$\langle a, x \rangle \leq b \; \forall x \in F \Leftrightarrow (a, b) \in \operatorname{cl} K \tag{2}$$

- Un sistema consistente σ es *Farkas-Minkowski* (FM) cuando K es cerrado. En tal caso, se puede eliminar "cl" en (2).

Sistemas lineales infinitos

- Teorema de existencia (Zhu, 1966):
$$F \neq \emptyset \Leftrightarrow (0,-1) \notin \operatorname{cl} K$$
- Lema de Farkas (Zhu, 1966): Sea $F \neq \emptyset$ y sean $a \in X^*$ y $b \in \mathbb{R}$. Entonces,
$$\langle a, x\rangle \leq b \ \forall x \in F \Leftrightarrow (a,b) \in \operatorname{cl} K \tag{2}$$
- Un sistema consistente σ es *Farkas-Minkowski* (FM) cuando K es cerrado. En tal caso, se puede eliminar "cl" en (2).
- GLMV95 caracteriza de diferentes formas los sistemas infinitos lineales *fuertemente inconsistentes*, i.e., aquellos que contienen algún subsistema finito inconsitente (la más sencilla: $(0,-1) \in K$).

Sistemas lineales infinitos

- Teorema de existencia (Zhu, 1966):

$$F \neq \emptyset \Leftrightarrow (0,-1) \notin \operatorname{cl} K$$

- Lema de Farkas (Zhu, 1966): Sea $F \neq \emptyset$ y sean $a \in X^*$ y $b \in \mathbb{R}$. Entonces,

$$\langle a, x\rangle \leq b \ \forall x \in F \Leftrightarrow (a,b) \in \operatorname{cl} K \tag{2}$$

- Un sistema consistente σ es *Farkas-Minkowski* (FM) cuando K es cerrado. En tal caso, se puede eliminar "cl" en (2).
- GLMV95 caracteriza de diferentes formas los sistemas infinitos lineales *fuertemente inconsistentes*, i.e., aquellos que contienen algún subsistema finito inconsitente (la más sencilla: $(0,-1) \in K$).
- LMT98 y DGL10 analizan la estabilidad cualitativa de los sistemas lineales infinitos.

Optimización infinita lineal

- El problema es

$$P: \ \text{Min } \langle c, x \rangle, \ x \in F,$$

donde $c \in X^*$ y $F \neq \emptyset$ es el conjunto solución del sistema lineal σ de (1).

- El problema es

$$P: \ \text{Min} \ \langle c, x \rangle, \ x \in F,$$

donde $c \in X^*$ y $F \neq \emptyset$ es el conjunto solución del sistema lineal σ de (1).

- El *conjunto óptimo* es

$$\operatorname{opt}(P) = \{x \in F : \langle c, x \rangle = v(P)\}.$$

Optimización infinita lineal

- El problema es

$$P: \ \text{Min} \ \langle c, x \rangle, \ x \in F,$$

  donde $c \in X^*$ y $F \neq \emptyset$ es el conjunto solución del sistema lineal σ de (1).

- El *conjunto óptimo* es

$$\operatorname{opt}(P) = \{x \in F : \langle c, x \rangle = v(P)\}.$$

- Teorema de optimalidad: dado $\overline{x} \in F$, $\overline{x} \in \operatorname{opt}(P)$ sii $\langle c, \overline{x} \rangle \leq \langle c, x \rangle \ \forall x \in F$ sii (Farkas)

$$(c, \langle c, \overline{x} \rangle) \in -\operatorname{cl} K, \tag{3}$$

  donde K es el cono característico de σ.

- Teorema de optimalidad para σ FM: dado $\overline{x} \in F$, $\overline{x} \in \operatorname{opt}(P)$ sii $\exists \lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}$ tal que

$$c = - \sum_{t \in T(\overline{x})} \lambda_t a_t \tag{4}$$

(condición de KKT), donde $T(\overline{x}) = \{t \in T : \langle a_t, \overline{x} \rangle = b_t\}$ es el *conjunto de índices activos* en $\overline{x}$ (mismo enunciado y prueba que en PL).

Optimización infinita lineal

- Teorema de optimalidad para σ FM: dado $\overline{x} \in F$, $\overline{x} \in \operatorname{opt}(P)$ sii $\exists \lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}$ tal que
$$c = -\sum_{t \in T(\overline{x})} \lambda_t a_t \tag{4}$$
(condición de KKT), donde $T(\overline{x}) = \{t \in T : \langle a_t, \overline{x} \rangle = b_t\}$ es el *conjunto de índices activos* en $\overline{x}$ (mismo enunciado y prueba que en PL).
- El *problema dual* de P es
$$D : \text{Max} \sum_{t \in T} \lambda_t b_t, \ \lambda \in \Lambda,$$
donde $\Lambda = \left\{ \lambda \in -\mathbb{R}_+^{(T)} : \sum_{t \in T} \lambda_t a_t = c \right\}$.

- Teorema de optimalidad para σ FM: dado $\overline{x} \in F$, $\overline{x} \in \operatorname{opt}(P)$ sii $\exists \lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}$ tal que
$$c = -\sum_{t \in T(\overline{x})} \lambda_t a_t \tag{4}$$
(condición de KKT), donde $T(\overline{x}) = \{t \in T : \langle a_t, \overline{x} \rangle = b_t\}$ es el *conjunto de índices activos* en $\overline{x}$ (mismo enunciado y prueba que en PL).
- El *problema dual* de P es
$$D : \text{Max} \sum_{t \in T} \lambda_t b_t, \; \lambda \in \Lambda,$$
donde $\Lambda = \left\{ \lambda \in -\mathbb{R}_+^{(T)} : \sum_{t \in T} \lambda_t a_t = c \right\}$.
- El *conjunto óptimo* es
$$\operatorname{opt}(D) = \{\lambda \in \Lambda : \sum_{t \in T} \lambda_t b_t = v(D)\}.$$

- Obviamente,

$$x \in F, \lambda \in \Lambda \Rightarrow \sum_{t \in T} \lambda_t b_t \leq \sum_{t \in T} \lambda_t \langle a_t, x \rangle = \langle c, x \rangle$$

por lo que $v(D) \leq v(P)$, pero (a diferencia de la PL), podemos tener $v(D) < v(P)$ incluso siendo P y D acotados.

- Obviamente,

$$x \in F, \lambda \in \Lambda \Rightarrow \sum_{t \in T} \lambda_t b_t \leq \sum_{t \in T} \lambda_t \langle a_t, x \rangle = \langle c, x \rangle$$

por lo que $v(D) \leq v(P)$, pero (a diferencia de la PL), podemos tener $v(D) < v(P)$ incluso siendo P y D acotados.

- Teorema de dualidad de Haar: si σ es FM, $v(D) = v(P)$ y $\operatorname{opt}(D) \neq \emptyset$.

- Obviamente,

$$x \in F, \lambda \in \Lambda \Rightarrow \sum_{t \in T} \lambda_t b_t \leq \sum_{t \in T} \lambda_t \langle a_t, x \rangle = \langle c, x \rangle$$

  por lo que $v(D) \leq v(P)$, pero (a diferencia de la PL), podemos tener $v(D) < v(P)$ incluso siendo P y D acotados.
- Teorema de dualidad de Haar: si σ es FM, $v(D) = v(P)$ y $\operatorname{opt}(D) \neq \emptyset$.
- Fuente: DGLV10, donde se dan caracterizaciones en términos de redes.

Sistemas convexos infinitos

Sistemas convexos infinitos

- Consideramos sistemas de la forma

$$\sigma := \{f_t(x) \leq 0, t \in T;\ x \in C\}, \tag{5}$$

donde T es arbitrario, $C \neq \emptyset$ es un subconjunto cerrado convexo en X y $f_t \in \Gamma(X)\ \forall t \in T$.

Sistemas convexos infinitos

- Consideramos sistemas de la forma

$$\sigma := \{f_t(x) \leq 0, t \in T;\ x \in C\}, \tag{5}$$

donde T es arbitrario, $C \neq \emptyset$ es un subconjunto cerrado convexo en X y $f_t \in \Gamma(X)$ $\forall t \in T$.

- Linealización de σ :

$$\begin{aligned} f_t(x) \leq 0 \quad &\iff \langle u, x\rangle \leq f_t^*(u),\ \forall u \in \operatorname{dom} f_t^* \\ &\iff \langle u, x\rangle \leq f_t^*(u) + \alpha,\ \forall u \in \operatorname{dom} f_t^*,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}_+. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_C(x) \leq 0 \quad &\iff \langle u, x\rangle \leq \delta_C^*(u),\ \forall u \in \operatorname{dom} \delta_C^* \\ &\iff \langle u, x\rangle \leq \delta_C^*(u) + \alpha,\ \forall u \in \operatorname{dom} \delta_C^*,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}_+. \end{aligned}$$

Sistemas convexos infinitos

- El *cono característico* de σ es el del sistema lineal equivalente, i.e.,

$$K = \operatorname{cone}\left\{ \bigcup_{t \in T} \operatorname{epi} f_t^* \cup \operatorname{epi} \delta_C^* \right\}$$

Sistemas convexos infinitos

- El *cono característico* de σ es el del sistema lineal equivalente, i.e.,

$$K = \operatorname{cone}\left\{ \bigcup_{t \in T} \operatorname{epi} f_t^* \cup \operatorname{epi} \delta_C^* \right\}$$

- σ es FM cuando K es cerrado.

Sistemas convexos infinitos

- El *cono característico* de σ es el del sistema lineal equivalente, i.e.,

$$K = \text{cone}\left\{ \bigcup_{t \in T} \text{epi} f_t^* \cup \text{epi} \delta_C^* \right\}$$

- σ es FM cuando K es cerrado.
- Aplicando los teoremas de Zhu al sistema lineal equivalente se obtienen el teorema de existencia

$$F \neq \emptyset \Leftrightarrow (0, -1) \notin \text{cl}\, K$$

y, si $F \neq \emptyset$, la versión lineal del lema de Farkas: dados $a \in X^*$ y $b \in \mathbb{R}$,

$$\langle a, x \rangle \leq b \ \forall x \in F \Leftrightarrow (a, b) \in \text{cl}\, K \tag{6}$$

Sistemas convexos infinitos

- De (6) se obtiene la versión convexa del lema de Farkas: sea $f \in \Gamma(X)$. Como $f(x) \leq 0 \iff \langle u, x\rangle \leq f^*(u) + \alpha, \ \forall u \in \mathrm{dom} f^*, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}_+,$

$$f(x) \leq 0 \ \forall x \in F \Leftrightarrow \mathrm{epi} f^* \subset \mathrm{cl}\, K$$

- De (6) se obtiene la versión convexa del lema de Farkas: sea $f \in \Gamma(X)$. Como
$f(x) \leq 0 \Longleftrightarrow \langle u, x \rangle \leq f^*(u) + \alpha, \ \forall u \in \mathrm{dom} f^*, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}_+,$

$$f(x) \leq 0 \ \forall x \in F \Leftrightarrow \mathrm{epi} f^* \subset \mathrm{cl}\, K$$

- Lo que más interesa en optimización convexa es la versión cóncava del lema de Farkas: sea $f \in \Gamma(X)$ tal que

$$\text{(CC) } \mathrm{epi} f^* + \mathrm{cl}\, K \text{ es cerrado.}$$

Entonces,

$$f(x) \geq 0 \ \forall x \in F \Leftrightarrow 0 \in \mathrm{cl}\left(\mathrm{epi} f^* + K\right)$$

- Se cumple (CC) cuando σ es FM y, además, f es afín o es continua en algún punto de F.

- Se cumple (CC) cuando σ es FM y, además, f es afín o es continua en algún punto de F.
- Fuentes: DGL06 y DGLS07.

Sistemas convexos infinitos

- Se cumple (CC) cuando σ es FM y, además, f es afín o es continua en algún punto de F.
- Fuentes: DGL06 y DGLS07.
- DGLV10 da versiones del lema de Farkas en términos de redes.

Sistemas convexos infinitos

- Se cumple (CC) cuando σ es FM y, además, f es afín o es continua en algún punto de F.
- Fuentes: DGL06 y DGLS07.
- DGLV10 da versiones del lema de Farkas en términos de redes.
- DGL10 caracteriza la estabilidad cualitativa de F.

Optimización infinita convexa

Optimización infinita convexa

- El problema es
$$P: \ \text{Min } f(x), \ x \in F,$$
donde $f \in \Gamma(X)$ y $F \neq \emptyset$ es el conjunto solución del sistema convexo σ de (5).

Optimización infinita convexa

- El problema es
$$P: \ \mathrm{Min}\ f(x), \ x \in F,$$
donde $f \in \Gamma(X)$ y $F \neq \emptyset$ es el conjunto solución del sistema convexo σ de (5).
- Suponemos que se cumple (CC).

- El problema es
$$P: \ \text{Min } f(x), \ x \in F,$$
donde $f \in \Gamma(X)$ y $F \neq \emptyset$ es el conjunto solución del sistema convexo σ de (5).
- Suponemos que se cumple (CC).
- Teorema de optimalidad: dado $\overline{x} \in F \cap \operatorname{dom} f$, $\overline{x} \in \operatorname{opt}(P)$ sii $f(\overline{x}) \leq f(x)$ $\forall x \in F$ sii $0 \in \operatorname{cl}\left(\operatorname{epi}\left[f - f(\overline{x})\right]^* + K\right)$. Como
$$\operatorname{epi}\left[f - f(\overline{x})\right]^* = (0, f(\overline{x})) + \operatorname{epi} f^*,$$
se obtiene
$$\overline{x} \in \operatorname{opt}(P) \Leftrightarrow (0, f(\overline{x})) \in -\operatorname{cl}\left(\operatorname{epi} f^* + K\right)$$

- Teorema de optimalidad para σ FM: dado $\overline{x} \in F \cap \operatorname{dom} f$, $\overline{x} \in \operatorname{opt}(P)$ sii existe $\lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}$ tal que $\partial f_t(\overline{x}) \neq \emptyset$ cuando $\lambda_t > 0$ y se cumple la condición de KKT:

$$0 \in \partial f(\overline{x}) + \sum_{t \in T(\overline{x})} \lambda_t \partial f_t(\overline{x}) + N_C(\overline{x})$$

- Teorema de optimalidad para σ FM: dado $\overline{x} \in F \cap \operatorname{dom} f$, $\overline{x} \in \operatorname{opt}(P)$ sii existe $\lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}$ tal que $\partial f_t(\overline{x}) \neq \emptyset$ cuando $\lambda_t > 0$ y se cumple la condición de KKT:

$$0 \in \partial f(\overline{x}) + \sum_{t \in T(\overline{x})} \lambda_t \partial f_t(\overline{x}) + N_C(\overline{x})$$

- El *problema dual de Lagrange* de P es

$$D : \text{Max } \inf_{x \in C} L(x, \lambda), \; \lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)},$$

donde $L : X \times \mathbb{R}^{(T)} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es la *función de Lagrange* de P :

$$L(x, \lambda) := \begin{cases} f(x) + \sum_{t \in T} \lambda_t f_t(x), & \text{si } x \in C \text{ and } \lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}, \\ +\infty, & \text{de no ser así.} \end{cases}$$

- Teorema de dualidad de Lagrange: si σ es FM, $v(D) = v(P)$ y $\operatorname{opt}(D) \neq \emptyset$.

Optimización infinita convexa

- Teorema de dualidad de Lagrange: si σ es FM, $v(D) = v(P)$ y $\operatorname{opt}(D) \neq \emptyset$.
- Teorema de optimalidad en términos de L: si σ es FM y $\overline{x} \in F \cap \operatorname{dom} f$, $\overline{x} \in \operatorname{opt}(P)$ sii existe $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}_{+}^{(T)}$ tal que $(\overline{x}, \bar{\lambda})$ es punto de silla de la función de Lagrange L, i.e.,

$$L(\overline{x}, \lambda) \leq L(\overline{x}, \bar{\lambda}) \leq L(x, \bar{\lambda}), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}_{+}^{(T)} \text{ y } \forall x \in C,$$

en cuyo caso $\bar{\lambda} \in \operatorname{opt}(D)$.

Optimización infinita convexa

- Teorema de dualidad de Lagrange: si σ es FM, $v(D) = v(P)$ y $\operatorname{opt}(D) \neq \emptyset$.
- Teorema de optimalidad en términos de L: si σ es FM y $\overline{x} \in F \cap \operatorname{dom} f$, $\overline{x} \in \operatorname{opt}(P)$ sii existe $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}_+^{(T)}$ tal que $(\overline{x}, \bar{\lambda})$ es punto de silla de la función de Lagrange L, i.e.,

$$L(\overline{x}, \lambda) \leq L(\overline{x}, \bar{\lambda}) \leq L(x, \bar{\lambda}), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)} \text{ y } \forall x \in C,$$

  en cuyo caso $\bar{\lambda} \in \operatorname{opt}(D)$.
- Fuente: DGLS07.

- DGLV10 proporciona teoremas de optimalidad y dualidad en términos de redes.

- DGLV10 proporciona teoremas de optimalidad y dualidad en términos de redes.
- GJL08 caracteriza los sistemas para los que vale el teorema de dualidad de Haar (en PIL) o de Lagrange (en PIC) para cualquier función objetivo, mientras que LFLL09 hace lo propio con la dualidad de Fenchel (en PIC).

- DGLV10 proporciona teoremas de optimalidad y dualidad en términos de redes.
- GJL08 caracteriza los sistemas para los que vale el teorema de dualidad de Haar (en PIL) o de Lagrange (en PIC) para cualquier función objetivo, mientras que LFLL09 hace lo propio con la dualidad de Fenchel (en PIC).
- Uno de los fundamentos de la optimización convexa es el cálculo subdiferencial. HLZ08 da fórmulas, en términos de los $\varepsilon-$subdiferenciales de las funciones involucradas, para

$$\partial \sup_{t \in T} f_t,$$

con $f_t \in \Gamma(X)$ $\forall t \in T$, mientras que DGLV10 hace lo mismo para

$$\partial (f + g + k \circ H), \tag{7}$$

donde $f, g \in \Gamma(X)$, $H : X \mapsto Z$ (siendo Z otro espacio l.c.H.) y $k \in \Gamma(Z)$; (7) extiende la fórmula de Hiriart-Urruty y Phelps para $\partial (f + g)$.

Problemas no convexos

Problemas no convexos

- DGLV10 proporciona lemas de Farkas y teoremas de optimalidad para optimización DC.

Problemas no convexos

- DGLV10 proporciona lemas de Farkas y teoremas de optimalidad para optimización DC.
- DGL10 caracteriza la estabilidad cualitativa de $F = \{x \in C : f_t(x) \leq 0, t \in T\}$, donde T es arbitrario, $C \neq \emptyset$ es un subconjunto cerrado convexo en X y $f_t : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es propia, sci y sus mínimos locales son globales $\forall t \in T$.

Problemas no convexos

- DGLV10 proporciona lemas de Farkas y teoremas de optimalidad para optimización DC.
- DGL10 caracteriza la estabilidad cualitativa de $F = \{x \in C : f_t(x) \leq 0, t \in T\}$, donde T es arbitrario, $C \neq \emptyset$ es un subconjunto cerrado convexo en X y $f_t : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es propia, sci y sus mínimos locales son globales $\forall t \in T$.
- LV10 proporciona fórmulas para calcular $\operatorname{opt}(P)$, donde

$$P: \text{ Min } f(x), \ x \in X,$$

es un problema de optimización no convexa sin restricciones, en términos de los conjuntos de soluciones $\varepsilon-$óptimas del *problema relajado:*

$$P': \text{ Min } f^{**}(x), \ x \in X,$$

Problemas no convexos

- En los dos últimos artículos que voy a mencionar X es espacio de Banach, lo que permite utilizar derivadas generalizadas de Mordukhovich y la fórmula de Hiriart-Urruty y Phelps.

Problemas no convexos

- En los dos últimos artículos que voy a mencionar X es espacio de Banach, lo que permite utilizar derivadas generalizadas de Mordukhovich y la fórmula de Hiriart-Urruty y Phelps.
- HLV10 proporciona fórmulas para $\operatorname{opt}(P')$ en términos de los conjuntos de soluciones $\varepsilon-$óptimas de P, lo que interesa cuando $\operatorname{opt}(P) = \emptyset$.

Problemas no convexos

- En los dos últimos artículos que voy a mencionar X es espacio de Banach, lo que permite utilizar derivadas generalizadas de Mordukhovich y la fórmula de Hiriart-Urruty y Phelps.
- HLV10 proporciona fórmulas para $\operatorname{opt}(P')$ en términos de los conjuntos de soluciones $\varepsilon-$óptimas de P, lo que interesa cuando $\operatorname{opt}(P) = \emptyset$.
- CLMP09 estudia la estabilidad cuantitativa (robustez Lipschitziana) de un problema paramétrico

$$P(p): \ \text{Min } f(x,p), \ x \in F(p),$$

donde el espacio de parámetros es $l_\infty(T)$, el espacio (de Banach) de las funciones acotadas sobre T con la norma l_∞ y

$$F(p) = \{x \in X : \langle a_t, x\rangle \leq b_t + \langle c_t, p\rangle, \ t \in T\}.$$