# ANÁLISIS DE ESTABILIDAD EN PROGRAMACIÓN SEMI-INFINITA

## PARTE I: Distancia al Mal Planteamiento

Homenaje al Profesor Marco A. López Cerdá

Fco. Javier Toledo Melero

Instituto Universitario *Centro de Investigación Operativa*

Alicante, 19-20 Febrero 2010

# Índice

# Contexto

**Ejemplo:** Dadas las funciones convexas $f_1(x) := x^2 - x$, $f_2(x) := x^2 + x - 1$, consideramos un sistema de la forma

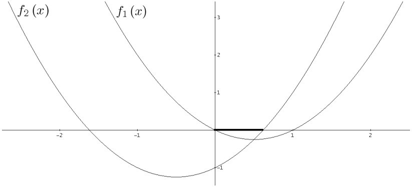
$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(x) := x^2 - x \leq 0 \\ f_2(x) := x^2 + x - 1 \leq 0 \end{array} \right\} = \{f_t(x) \leq 0\ ,\ t \in \{1,2\}\}$$

# Contexto

**Ejemplo:** Dadas las funciones convexas $f_1(x) := x^2 - x$, $f_2(x) := x^2 + x - 1$, consideramos un sistema de la forma

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(x) := x^2 - x \leq 0 \\ f_2(x) := x^2 + x - 1 \leq 0 \end{array} \right\} = \{f_t(x) \leq 0 \text{ , } t \in \{1,2\}\}$$

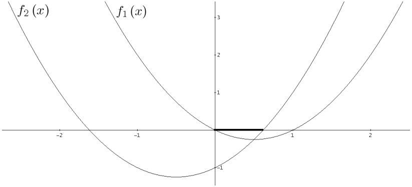
Es un ejercicio elemental ver que la solución de este sistema es el intervalo $\left[0, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right]$ como se observa en la siguiente figura:



**Ejemplo:** Dadas las funciones convexas $f_1(x) := x^2 - x$, $f_2(x) := x^2 + x - 1$, consideramos un sistema de la forma

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(x) := x^2 - x \leq 0 \\ f_2(x) := x^2 + x - 1 \leq 0 \end{array} \right\} = \{f_t(x) \leq 0 \ , \ t \in \{1,2\}\}$$

Es un ejercicio elemental ver que la solución de este sistema es el intervalo $\left[0, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right]$ como se observa en la siguiente figura:




En general, podemos escribir un sistema de desigualdades convexas como

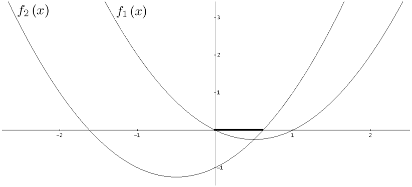
$$\{f_t(x) \leq 0 \ , \ t \in T\}$$

# Contexto

**Ejemplo:** Dadas las funciones convexas $f_1(x) := x^2 - x$, $f_2(x) := x^2 + x - 1$, consideramos un sistema de la forma

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(x) := x^2 - x \leq 0 \\ f_2(x) := x^2 + x - 1 \leq 0 \end{array} \right\} = \{ f_t(x) \leq 0 \ , \ t \in \{1,2\} \}$$

Es un ejercicio elemental ver que la solución de este sistema es el intervalo $\left[0, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right]$ como se observa en la siguiente figura:




En general, podemos escribir un sistema de desigualdades convexas como

$$\{ f_t(x) \leq 0 \ , \ t \in T \}$$

donde $f_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ son funciones convexas propias para todo $t \in T$, siendo $T$ un conjunto de índices arbitrario.

# Contexto

Un caso particular del *sistema convexo*

$$\{f_t(x) \leq 0 \ , \ t \in T\} \tag{1}$$

aparece cuando las funciones $f_t$ son funciones afines, esto es,

$$f_t(x) := b_t - \langle a_t, x \rangle .$$

# Contexto

Un caso particular del *sistema convexo*

$$\{f_t(x) \leq 0 \ , \ t \in T\} \tag{1}$$

aparece cuando las funciones $f_t$ son funciones afines, esto es,

$$f_t(x) := b_t - \langle a_t, x \rangle \, .$$

En tal caso el sistema queda de la forma

$$\{\langle a_t, x \rangle \geq b_t \ , \ t \in T\} \tag{2}$$

Este sistema se llama *sistema lineal* .

# Contexto

Un caso particular del *sistema convexo*

$$\{f_t(x) \leq 0 \ , \ t \in T\} \tag{1}$$

aparece cuando las funciones $f_t$ son funciones afines, esto es,

$$f_t(x) := b_t - \langle a_t, x \rangle \, .$$

En tal caso el sistema queda de la forma

$$\{\langle a_t, x \rangle \geq b_t \ , \ t \in T\} \tag{2}$$

Este sistema se llama *sistema lineal* .
Tanto al sistema convexo como al lineal les llamaremos **semi-infinitos** cuando el conjunto de índices $T$ sea arbitrario (posiblemente infinito).
Cuando $T$ sea finito les llamaremos **ordinarios**.

# Contexto

Un caso particular del *sistema convexo*

$$\{f_t(x) \leq 0 \ , \ t \in T\} \tag{1}$$

aparece cuando las funciones $f_t$ son funciones afines, esto es,

$$f_t(x) := b_t - \langle a_t, x \rangle .$$

En tal caso el sistema queda de la forma

$$\{\langle a_t, x \rangle \geq b_t \ , \ t \in T\} \tag{2}$$

Este sistema se llama *sistema lineal* .
Tanto al sistema convexo como al lineal les llamaremos **semi-infinitos** cuando el conjunto de índices $T$ sea arbitrario (posiblemente infinito). Cuando $T$ sea finito les llamaremos **ordinarios**.

**Si no decimos lo contrario, en lo que sigue $T$ será arbitrario.**

# Sistema lineales: definiciones

Denotaremos por $\Theta$ al espacio paramétrico de todos los sistemas

$$\sigma := \{\langle a_t, x \rangle \geq b_t \ , \ t \in T\}$$

# Sistema lineales: definiciones

Denotaremos por $\Theta$ al espacio paramétrico de todos los sistemas

$$\sigma := \{\langle a_t, x\rangle \geq b_t \ , \ t \in T\}$$

Denotaremos por $F$ al conjunto de soluciones o conjunto factible de $\sigma$:

$$F := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a_t, x\rangle \geq b_t \ \forall t \in T\}$$

# Sistema lineales: definiciones

Denotaremos por $\Theta$ al espacio paramétrico de todos los sistemas

$$\sigma := \{\langle a_t, x\rangle \geq b_t \ , \ t \in T\}$$

Denotaremos por $F$ al conjunto de soluciones o conjunto factible de $\sigma$:

$$F := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a_t, x\rangle \geq b_t \ \forall t \in T\}$$

Denotaremos por:

$\Theta_c := \{\sigma \in \Theta \mid F \neq \emptyset\}$ sistemas consistentes

# Sistema lineales: definiciones

Denotaremos por $\Theta$ al espacio paramétrico de todos los sistemas

$$\sigma := \{\langle a_t, x\rangle \geq b_t \ , \ t \in T\}$$

Denotaremos por $F$ al conjunto de soluciones o conjunto factible de $\sigma$:

$$F := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a_t, x\rangle \geq b_t \ \forall t \in T\}$$

Denotaremos por:

$\Theta_c := \{\sigma \in \Theta \mid F \neq \varnothing\}$ sistemas consistentes

$\Theta_i := \{\sigma \in \Theta \mid F = \varnothing\} = \Theta \backslash \Theta_c$ sistemas inconsistentes

# Sistema lineales: definiciones

Denotaremos por $\Theta$ al espacio paramétrico de todos los sistemas

$$\sigma := \{\langle a_t, x\rangle \geq b_t \ , \ t \in T\}$$

Denotaremos por $F$ al conjunto de soluciones o conjunto factible de $\sigma$:

$$F := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a_t, x\rangle \geq b_t \ \forall t \in T\}$$

Denotaremos por:

$\Theta_c := \{\sigma \in \Theta \mid F \neq \varnothing\}$ sistemas consistentes

$\Theta_i := \{\sigma \in \Theta \mid F = \varnothing\} = \Theta \setminus \Theta_c$ sistemas inconsistentes

Los sistemas inconsistentes se dividen a su vez en:

$\Theta_{si}$ fuertemente inconsistentes : tienen un subsistema finito inconsistente

# Sistema lineales: definiciones

Denotaremos por $\Theta$ al espacio paramétrico de todos los sistemas

$$\sigma := \{\langle a_t, x\rangle \geq b_t \ , \ t \in T\}$$

Denotaremos por $F$ al conjunto de soluciones o conjunto factible de $\sigma$:

$$F := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a_t, x\rangle \geq b_t \ \forall t \in T\}$$

Denotaremos por:

$\Theta_c := \{\sigma \in \Theta \mid F \neq \emptyset\}$ sistemas consistentes

$\Theta_i := \{\sigma \in \Theta \mid F = \emptyset\} = \Theta \backslash \Theta_c$ sistemas inconsistentes

Los sistemas inconsistentes se dividen a su vez en:

$\Theta_{si}$ fuertemente inconsistentes : tienen un subsistema finito inconsistente

$\Theta_{wi}$ debilmente inconsistentes : todo subsistema finito es consistente

Denotaremos por $\Theta$ al espacio paramétrico de todos los sistemas

$$\sigma := \{\langle a_t, x\rangle \geq b_t \ , \ t \in T\}$$

Denotaremos por $F$ al conjunto de soluciones o conjunto factible de $\sigma$:

$$F := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a_t, x\rangle \geq b_t \ \forall t \in T\}$$

Denotaremos por:

$\Theta_c := \{\sigma \in \Theta \mid F \neq \emptyset\}$ sistemas consistentes

$\Theta_i := \{\sigma \in \Theta \mid F = \emptyset\} = \Theta \backslash \Theta_c$ sistemas inconsistentes

Los sistemas inconsistentes se dividen a su vez en:

$\Theta_{si}$ fuertemente inconsistentes : tienen un subsistema finito inconsistente

$\Theta_{wi}$ debilmente inconsistentes : todo subsistema finito es consistente

**Ej.** $\sigma = \left\{\frac{1}{t}x \geq 1, t \in \mathbb{N}\right\} \in \Theta_{wi}$

# Sistema lineales: definiciones

Denotaremos por $\Theta$ al espacio paramétrico de todos los sistemas

$$\sigma := \{\langle a_t, x\rangle \geq b_t \ , \ t \in T\}$$

Denotaremos por $F$ al conjunto de soluciones o conjunto factible de $\sigma$:

$$F := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a_t, x\rangle \geq b_t \ \forall t \in T\}$$

Denotaremos por:

$\Theta_c := \{\sigma \in \Theta \mid F \neq \emptyset\}$ sistemas consistentes

$\Theta_i := \{\sigma \in \Theta \mid F = \emptyset\} = \Theta \backslash \Theta_c$ sistemas inconsistentes

Los sistemas inconsistentes se dividen a su vez en:

$\Theta_{si}$ fuertemente inconsistentes : tienen un subsistema finito inconsistente

$\Theta_{wi}$ debilmente inconsistentes : todo subsistema finito es consistente

$$\textbf{Ej.} \ \sigma = \left\{\tfrac{1}{t}x \geq 1, t \in \mathbb{N}\right\} \in \Theta_{wi}$$

Observar que si $T$ es finito $\Theta_{si} = \Theta_i$.

Asociados a un sistema $\sigma := \{\langle a_t, x\rangle \geq b_t \ , \ t \in T\}$ tenemos los siguientes conos convexos:

$$N := cone\left\{\begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix}, \ t \in T\right\} \qquad K := N + \mathbb{R}_+\left\{\begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix}\right\}.$$

# Caracterización de los diferentes tipos de sistemas

Asociados a un sistema $\sigma := \{\langle a_t, x\rangle \geq b_t \ , \ t \in T\}$ tenemos los siguientes conos convexos:

$$N := cone\left\{\begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix},\ t \in T\right\} \qquad K := N + \mathbb{R}_+\left\{\begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix}\right\}.$$

El siguiente resultado de Goberna, López y Todorov caracteriza los diferentes tipos de sistemas a través de los conos anteriores:

# Caracterización de los diferentes tipos de sistemas

Asociados a un sistema $\sigma := \{\langle a_t, x\rangle \geq b_t \ , \ t \in T\}$ tenemos los siguientes conos convexos:

$$N := cone\left\{\begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix}, \ t \in T\right\} \qquad K := N + \mathbb{R}_+\left\{\begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix}\right\}.$$

El siguiente resultado de Goberna, López y Todorov caracteriza los diferentes tipos de sistemas a través de los conos anteriores:

$$\sigma \in \Theta_c \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} \notin cl\,(N) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} \notin cl\,(K)\,;$$

# Caracterización de los diferentes tipos de sistemas

Asociados a un sistema $\sigma := \{\langle a_t, x\rangle \geq b_t \ , \ t \in T\}$ tenemos los siguientes conos convexos:

$$N := cone\left\{\begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix}, \ t \in T\right\} \qquad K := N + \mathbb{R}_+\left\{\begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix}\right\}.$$

El siguiente resultado de Goberna, López y Todorov caracteriza los diferentes tipos de sistemas a través de los conos anteriores:

$$\sigma \in \Theta_c \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} \notin cl\,(N) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} \notin cl\,(K)\,;$$

$$\sigma \in \Theta_{wi} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} \in cl\,(N) \setminus N \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} \in cl\,(K) \setminus K;$$

# Caracterización de los diferentes tipos de sistemas

Asociados a un sistema $\sigma := \{\langle a_t, x\rangle \geq b_t \ , \ t \in T\}$ tenemos los siguientes conos convexos:

$$N := cone\left\{\begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix}, \ t \in T\right\} \qquad K := N + \mathbb{R}_+\left\{\begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix}\right\}.$$

El siguiente resultado de Goberna, López y Todorov caracteriza los diferentes tipos de sistemas a través de los conos anteriores:

$$\sigma \in \Theta_c \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} \notin cl\,(N) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} \notin cl\,(K)\,;$$

$$\sigma \in \Theta_{wi} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} \in cl\,(N) \setminus N \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} \in cl\,(K) \setminus K;$$

$$\sigma \in \Theta_{si} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} \in N \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} \in K.$$

# Caracterización de los diferentes tipos de sistemas

Los siguientes ejemplos ilustran el resultado anterior.
Observar que lo único que necesitamos conocer son los coeficientes de los sistemas y no es necesario hallar solución alguna.

# Caracterización de los diferentes tipos de sistemas

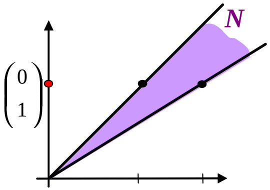
Los siguientes ejemplos ilustran el resultado anterior.
Observar que lo único que necesitamos conocer son los coeficientes de los sistemas y no es necesario hallar solución alguna.

$$\sigma = \{x \geq 1 \ , \ 2x \geq 1\}$$

# Caracterización de los diferentes tipos de sistemas

Los siguientes ejemplos ilustran el resultado anterior.
Observar que lo único que necesitamos conocer son los coeficientes de los sistemas y no es necesario hallar solución alguna.

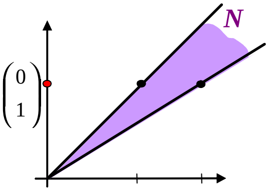
$$\sigma = \{x \geq 1\ ,\ 2x \geq 1\}$$



# Caracterización de los diferentes tipos de sistemas

Los siguientes ejemplos ilustran el resultado anterior.
Observar que lo único que necesitamos conocer son los coeficientes de los sistemas y no es necesario hallar solución alguna.

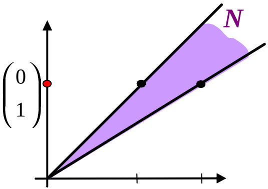
$$\sigma = \{x \geq 1 \ , \ 2x \geq 1\}$$




$$\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} \notin cl\,(N)$$

Los siguientes ejemplos ilustran el resultado anterior.
Observar que lo único que necesitamos conocer son los coeficientes de los sistemas y no es necesario hallar solución alguna.

$\sigma = \{x \geq 1 \, , \, 2x \geq 1\}$

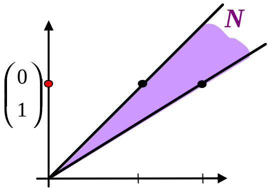



$$\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} \notin cl\,(N)$$

$$\sigma \in \Theta_c$$

Los siguientes ejemplos ilustran el resultado anterior.
Observar que lo único que necesitamos conocer son los coeficientes de los sistemas y no es necesario hallar solución alguna.

$\sigma = \{x \geq 1\ ,\ 2x \geq 1\}$ $\sigma = \left\{\frac{1}{t}x \geq 1\ ,\ t \in \mathbb{N}\right\}$



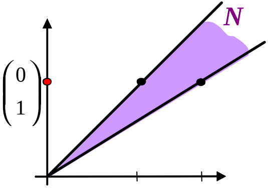

$$\binom{0_n}{1} \notin cl\,(N)$$

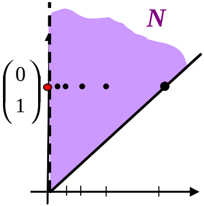
$$\sigma \in \Theta_c$$

# Caracterización de los diferentes tipos de sistemas

Los siguientes ejemplos ilustran el resultado anterior.
Observar que lo único que necesitamos conocer son los coeficientes de los sistemas y no es necesario hallar solución alguna.

$\sigma = \{x \geq 1 \, , \, 2x \geq 1\}$ $\quad$ $\sigma = \left\{\frac{1}{t}x \geq 1 \, , \, t \in \mathbb{N}\right\}$



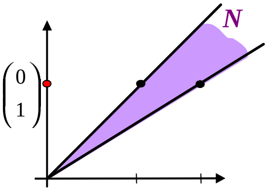



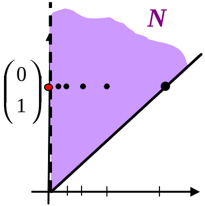

$$\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} \notin cl\,(N)$$

$$\sigma \in \Theta_c$$

Los siguientes ejemplos ilustran el resultado anterior.
Observar que lo único que necesitamos conocer son los coeficientes de los sistemas y no es necesario hallar solución alguna.

$\sigma = \{x \geq 1 \, , \, 2x \geq 1\}$ $\quad$ $\sigma = \left\{ \frac{1}{t}x \geq 1 \, , \, t \in \mathbb{N} \right\}$



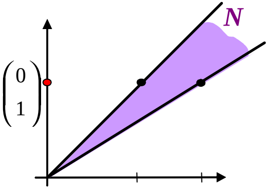

$$\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} \notin cl\,(N) \qquad \begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} \in cl\,(N) \setminus N$$

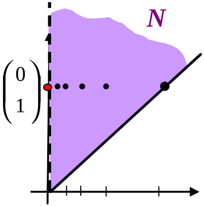
$$\sigma \in \Theta_c$$

# Caracterización de los diferentes tipos de sistemas

Los siguientes ejemplos ilustran el resultado anterior.
Observar que lo único que necesitamos conocer son los coeficientes de los sistemas y no es necesario hallar solución alguna.

$\sigma = \{x \geq 1 \,, \, 2x \geq 1\}$ $\quad$ $\sigma = \left\{\frac{1}{t}x \geq 1 \,, \, t \in \mathbb{N}\right\}$



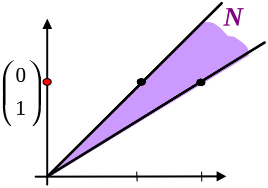

$\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} \notin cl\,(N)$ $\quad$ $\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} \in cl\,(N) \setminus N$

$\sigma \in \Theta_c$ $\quad$ $\sigma \in \Theta_{wi}$

# Caracterización de los diferentes tipos de sistemas

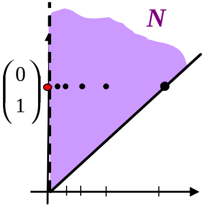
Los siguientes ejemplos ilustran el resultado anterior.
Observar que lo único que necesitamos conocer son los coeficientes de los sistemas y no es necesario hallar solución alguna.

$$\sigma = \{x \geq 1 \, , \, 2x \geq 1\} \quad \sigma = \left\{\tfrac{1}{t}x \geq 1 \, , \, t \in \mathbb{N}\right\} \quad \sigma = \{x \geq 1 \, , \, -x \geq 1\}$$




$$\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} \notin cl\,(N)$$

$$\sigma \in \Theta_c$$

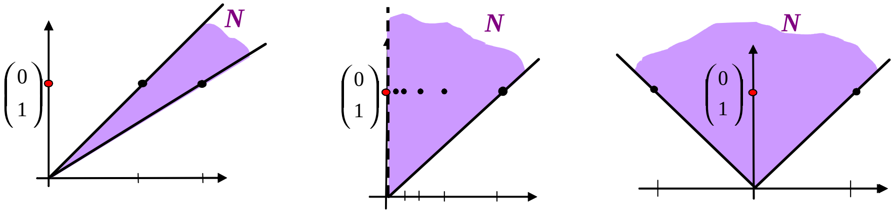



$$\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} \in cl\,(N) \setminus N$$

$$\sigma \in \Theta_{wi}$$

Los siguientes ejemplos ilustran el resultado anterior.
Observar que lo único que necesitamos conocer son los coeficientes de los sistemas y no es necesario hallar solución alguna.

$$\sigma = \{x \geq 1\,,\, 2x \geq 1\} \quad \sigma = \left\{\tfrac{1}{t}x \geq 1\,,\, t \in \mathbb{N}\right\} \quad \sigma = \{x \geq 1\,,\, -x \geq 1\}$$

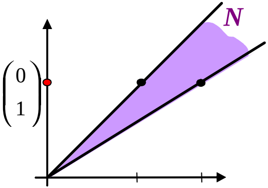


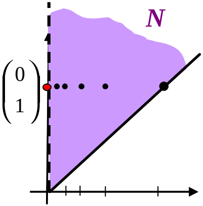

$$\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} \notin cl\,(N) \qquad \begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} \in cl\,(N) \setminus N$$

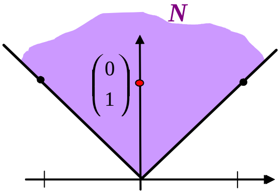
$$\sigma \in \Theta_c \qquad \sigma \in \Theta_{wi}$$

Los siguientes ejemplos ilustran el resultado anterior.
Observar que lo único que necesitamos conocer son los coeficientes de los sistemas y no es necesario hallar solución alguna.

$\sigma = \{x \geq 1\ ,\ 2x \geq 1\}$ $\quad \sigma = \left\{\frac{1}{t}x \geq 1\ ,\ t \in \mathbb{N}\right\}$ $\quad \sigma = \{x \geq 1\ ,\ -x \geq 1\}$




$\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} \notin cl\,(N)$

$\sigma \in \Theta_c$

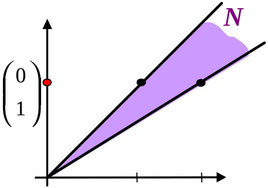
$\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} \in cl\,(N) \setminus N$

$\sigma \in \Theta_{wi}$

$\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} \in N$

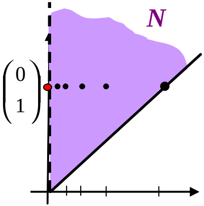
Los siguientes ejemplos ilustran el resultado anterior.
Observar que lo único que necesitamos conocer son los coeficientes de los sistemas y no es necesario hallar solución alguna.

$\sigma = \{x \geq 1\,,\, 2x \geq 1\}$ $\quad$ $\sigma = \left\{\frac{1}{t}x \geq 1\,,\, t \in \mathbb{N}\right\}$ $\quad$ $\sigma = \{x \geq 1\,,\, -x \geq 1\}$



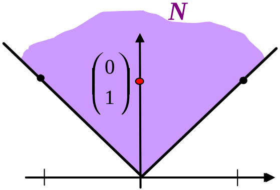

$$\binom{0_n}{1} \notin cl\,(N)$$

$$\sigma \in \Theta_c$$




$$\binom{0_n}{1} \in cl\,(N) \setminus N$$

$$\sigma \in \Theta_{wi}$$




$$\binom{0_n}{1} \in N$$

$$\sigma \in \Theta_{si}$$

# Topología del espacio paramétrico: distancia entre sistemas

Cuando consideremos diferentes sistemas en $\Theta$, ellos y sus elementos los distinguiremos con sub(super)índices.

# Topología del espacio paramétrico: distancia entre sistemas

Cuando consideremos diferentes sistemas en $\Theta$, ellos y sus elementos los distinguiremos con sub(super)índices.

Dados $\sigma_1 = \left\{ \langle a_t^1, x \rangle \geq b_t^1 \ , \ t \in T \right\}$ y $\sigma_2 = \left\{ \langle a_t^2, x \rangle \geq b_t^2 \ , \ t \in T \right\}$, definimos la siguiente distancia extendida entre ambos como:

$$d\left(\sigma_1, \sigma_2\right) := \sup_{t \in T} \left\| \begin{pmatrix} a_t^1 \\ b_t^1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_t^2 \\ b_t^2 \end{pmatrix} \right\|$$

donde $\|\cdot\|$ es cualquier norma dada en $\mathbb{R}^{n+1}$. Esta distancia dota a $\Theta$ de la topología de la convergencia uniforme de los vectores de coeficientes.

# Topología del espacio paramétrico: distancia entre sistemas

Cuando consideremos diferentes sistemas en $\Theta$, ellos y sus elementos los distinguiremos con sub(super)índices.

Dados $\sigma_1 = \left\{ \left\langle a_t^1, x \right\rangle \geq b_t^1 \ , \ t \in T \right\}$ y $\sigma_2 = \left\{ \left\langle a_t^2, x \right\rangle \geq b_t^2 \ , \ t \in T \right\}$, definimos la siguiente distancia extendida entre ambos como:

$$d\left(\sigma_1, \sigma_2\right) := \sup_{t \in T} \left\| \begin{pmatrix} a_t^1 \\ b_t^1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_t^2 \\ b_t^2 \end{pmatrix} \right\|$$

donde $\|\cdot\|$ es cualquier norma dada en $\mathbb{R}^{n+1}$. Esta distancia dota a $\Theta$ de la topología de la convergencia uniforme de los vectores de coeficientes.

Dados $\sigma \in \Theta$ y $\widetilde{\Theta} \subset \Theta$, escribiremos

$$d(\sigma, \widetilde{\Theta}) := \inf \left\{ d\left(\sigma, \widetilde{\sigma}\right) \mid \widetilde{\sigma} \in \widetilde{\Theta} \right\} \in [0, +\infty].$$

# Concepto de estabilidad: mal planteamiento

Si $P$ es una propiedad de los sistemas y denotamos por $\Theta_P$ al conjunto de todos los sistemas con esta propiedad,

# Concepto de estabilidad: mal planteamiento

Si $P$ es una propiedad de los sistemas y denotamos por $\Theta_P$ al conjunto de todos los sistemas con esta propiedad, diremos que un sistema $\sigma$ es estable o está bien planteado **con respecto a la propiedad** $P$ si los sistemas próximos a él poseen esta propiedad, i.e., si

$$\sigma \in int\left(\Theta_P\right).$$

# Concepto de estabilidad: mal planteamiento

Si $P$ es una propiedad de los sistemas y denotamos por $\Theta_P$ al conjunto de todos los sistemas con esta propiedad, diremos que un sistema $\sigma$ es estable o está bien planteado **con respecto a la propiedad** $P$ si los sistemas próximos a él poseen esta propiedad, i.e., si

$$\sigma \in int\left(\Theta_P\right).$$

Así, diremos que un sistema $\sigma$ es inestable o está mal planteado **con respecto a la propiedad** $P$ si perturbaciones arbitrariamente pequeñas de $\sigma$ dan lugar tanto a sistemas que tienen o no dicha propiedad, i.e, si

$$\sigma \in bd\left(\Theta_P\right).$$

# Concepto de estabilidad: mal planteamiento

Si $P$ es una propiedad de los sistemas y denotamos por $\Theta_P$ al conjunto de todos los sistemas con esta propiedad, diremos que un sistema $\sigma$ es estable o está bien planteado **con respecto a la propiedad** $P$ si los sistemas próximos a él poseen esta propiedad, i.e., si

$$\sigma \in int\left(\Theta_P\right).$$

Así, diremos que un sistema $\sigma$ es inestable o está mal planteado **con respecto a la propiedad** $P$ si perturbaciones arbitrariamente pequeñas de $\sigma$ dan lugar tanto a sistemas que tienen o no dicha propiedad, i.e, si

$$\sigma \in bd\left(\Theta_P\right).$$

*En nuestro contexto, existen diferentes criterios de estabilidad para un sistema consistente que son equivalentes a que* $\sigma \in int\left(\Theta_c\right)$.

# Concepto de estabilidad: mal planteamiento

Si $P$ es una propiedad de los sistemas y denotamos por $\Theta_P$ al conjunto de todos los sistemas con esta propiedad, diremos que un sistema $\sigma$ es estable o está bien planteado **con respecto a la propiedad $P$** si los sistemas próximos a él poseen esta propiedad, i.e., si

$$\sigma \in int\left(\Theta_P\right).$$

Así, diremos que un sistema $\sigma$ es inestable o está mal planteado **con respecto a la propiedad $P$** si perturbaciones arbitrariamente pequeñas de $\sigma$ dan lugar tanto a sistemas que tienen o no dicha propiedad, i.e, si

$$\sigma \in bd\left(\Theta_P\right).$$

*En nuestro contexto, existen diferentes criterios de estabilidad para un sistema consistente que son equivalentes a que $\sigma \in int\left(\Theta_c\right)$.*

Llamaremos distancia de $\sigma$ al mal planteamiento (con respecto a $P$) a

$$d\left(\sigma, bd\left(\Theta_P\right)\right)$$

# Concepto de estabilidad: mal planteamiento

Si $P$ es una propiedad de los sistemas y denotamos por $\Theta_P$ al conjunto de todos los sistemas con esta propiedad, diremos que un sistema $\sigma$ es estable o está bien planteado **con respecto a la propiedad $P$** si los sistemas próximos a él poseen esta propiedad, i.e., si

$$\sigma \in int\left(\Theta_P\right).$$

Así, diremos que un sistema $\sigma$ es inestable o está mal planteado **con respecto a la propiedad $P$** si perturbaciones arbitrariamente pequeñas de $\sigma$ dan lugar tanto a sistemas que tienen o no dicha propiedad, i.e, si

$$\sigma \in bd\left(\Theta_P\right).$$

*En nuestro contexto, existen diferentes criterios de estabilidad para un sistema consistente que son equivalentes a que $\sigma \in int\left(\Theta_c\right)$.*

Llamaremos distancia de $\sigma$ al mal planteamiento (con respecto a $P$) a

$$d\left(\sigma, bd\left(\Theta_P\right)\right) \ .$$

*Estos conceptos son utilizados en otros contextos como el de los sistemas lineales cónicos (Renegar, Freund, Vera).*

# Partición espacio paramétrico y mal planteamiento

En nuestro contexto los vectores de coeficientes de un sistema pueden no estar acotados cuando $T$ es infinito, aparece entonces el subconjunto

$$\Theta_\infty := \{\sigma \in \Theta \mid d(\sigma, bd(\Theta_c)) = +\infty\}.$$

# Partición espacio paramétrico y mal planteamiento

En nuestro contexto los vectores de coeficientes de un sistema pueden no estar acotados cuando $T$ es infinito, aparece entonces el subconjunto

$$\Theta_\infty := \{\sigma \in \Theta \mid d(\sigma, bd(\Theta_c)) = +\infty\}.$$

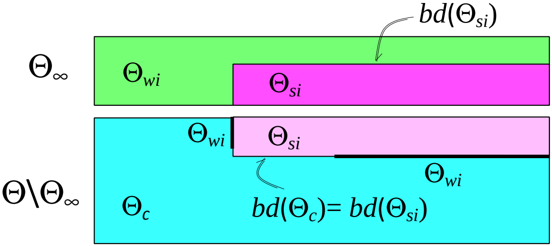
Se tiene que $\Theta_\infty \subset int(\Theta_i)$, sin embargo, hay sistemas en $\Theta_\infty$ inestables respecto de la inconsistencia fuerte y débil.

# Partición espacio paramétrico y mal planteamiento

En nuestro contexto los vectores de coeficientes de un sistema pueden no estar acotados cuando $T$ es infinito, aparece entonces el subconjunto

$$\Theta_\infty := \{\sigma \in \Theta \mid d(\sigma, bd(\Theta_c)) = +\infty\}.$$

Se tiene que $\Theta_\infty \subset int(\Theta_i)$, sin embargo, hay sistemas en $\Theta_\infty$ inestables respecto de la inconsistencia fuerte y débil.
La siguiente figura resume algunos resultados y justifica nuestra elección de sistemas mal planteados.



# Caracterización y distancia al mal planteamiento

Al conjunto $bd\left(\Theta_{si}\right)$ lo llamamos mal planteamiento (generalizado).

# Caracterización y distancia al mal planteamiento

Al conjunto $bd\,(\Theta_{si})$ lo llamamos mal planteamiento (generalizado).
Dado un sistema $\sigma \in \Theta$, definimos su *conjunto hipográfico* $H$ como

$$H := C + \mathbb{R}_+ \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix}$$

# Caracterización y distancia al mal planteamiento

Al conjunto $bd\left(\Theta_{si}\right)$ lo llamamos mal planteamiento (generalizado).
Dado un sistema $\sigma \in \Theta$, definimos su *conjunto hipográfico $H$* como

$$H := C + \mathbb{R}_{+}\begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{donde } C := conv\left\{ \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix},\ t \in T \right\}.$$

# Caracterización y distancia al mal planteamiento

Al conjunto $bd\,(\Theta_{si})$ lo llamamos mal planteamiento (generalizado).
Dado un sistema $\sigma \in \Theta$, definimos su *conjunto hipográfico* $H$ como

$$H := C + \mathbb{R}_+ \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{donde } C := conv\left\{ \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix},\ t \in T \right\}.$$

En los siguientes resultados se caracteriza el mal planteamiento y se proporciona una fórmula para el cálculo de la distancia en términos del conjunto $H$:

# Caracterización y distancia al mal planteamiento

Al conjunto $bd\left(\Theta_{si}\right)$ lo llamamos mal planteamiento (generalizado).
Dado un sistema $\sigma \in \Theta$, definimos su *conjunto hipográfico $H$* como

$$H := C + \mathbb{R}_+ \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{donde } C := conv\left\{ \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix},\ t \in T \right\}.$$

En los siguientes resultados se caracteriza el mal planteamiento y se proporciona una fórmula para el cálculo de la distancia en términos del conjunto $H$:

$\sigma \in int\left(\Theta_{si}\right)$ si y sólo si $0_{n+1} \in int\left(H\right)$;

# Caracterización y distancia al mal planteamiento

Al conjunto $bd\left(\Theta_{si}\right)$ lo llamamos mal planteamiento (generalizado).
Dado un sistema $\sigma \in \Theta$, definimos su *conjunto hipográfico* $H$ como

$$H := C + \mathbb{R}_+ \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{donde } C := conv \left\{ \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix},\ t \in T \right\}.$$

En los siguientes resultados se caracteriza el mal planteamiento y se proporciona una fórmula para el cálculo de la distancia en términos del conjunto $H$:

$\sigma \in int\left(\Theta_{si}\right)$ si y sólo si $0_{n+1} \in int\left(H\right);$

$\sigma \in bd\left(\Theta_{si}\right)$ si y sólo si $0_{n+1} \in bd\left(H\right);$

# Caracterización y distancia al mal planteamiento

Al conjunto $bd\left(\Theta_{si}\right)$ lo llamamos mal planteamiento (generalizado).
Dado un sistema $\sigma \in \Theta$, definimos su *conjunto hipográfico* $H$ como

$$H := C + \mathbb{R}_{+}\begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{donde } C := conv\left\{\begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix},\ t \in T\right\}.$$

En los siguientes resultados se caracteriza el mal planteamiento y se proporciona una fórmula para el cálculo de la distancia en términos del conjunto $H$:

$\sigma \in int\left(\Theta_{si}\right)$ si y sólo si $0_{n+1} \in int\left(H\right);$

$\sigma \in bd\left(\Theta_{si}\right)$ si y sólo si $0_{n+1} \in bd\left(H\right);$

$\sigma \in ext\left(\Theta_{si}\right)$ si y sólo si $0_{n+1} \in ext\left(H\right);$

# Caracterización y distancia al mal planteamiento

Al conjunto $bd\left(\Theta_{si}\right)$ lo llamamos mal planteamiento (generalizado).
Dado un sistema $\sigma \in \Theta$, definimos su *conjunto hipográfico $H$* como

$$H := C + \mathbb{R}_+ \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{donde } C := conv\left\{ \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix},\ t \in T \right\}.$$

En los siguientes resultados se caracteriza el mal planteamiento y se proporciona una fórmula para el cálculo de la distancia en términos del conjunto $H$:

$\sigma \in int\left(\Theta_{si}\right)$ si y sólo si $0_{n+1} \in int\,(H)$;

$\sigma \in bd\left(\Theta_{si}\right)$ si y sólo si $0_{n+1} \in bd\,(H)$;

$\sigma \in ext\left(\Theta_{si}\right)$ si y sólo si $0_{n+1} \in ext\,(H)$;

$d\left(\sigma, bd\left(\Theta_{si}\right)\right) = d\left(0_{n+1}, bd\,(H)\right)$.

# Caracterización y distancia al mal planteamiento

Los siguientes ejemplos ilustran el resultado anterior.
Observar que lo único que necesitamos conocer son los coeficientes de los sistemas.

# Caracterización y distancia al mal planteamiento

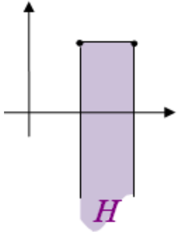
Los siguientes ejemplos ilustran el resultado anterior.
Observar que lo único que necesitamos conocer son los coeficientes de los sistemas.

$\sigma = \{x \geq 1 \ , \ 2x \geq 1\}$

# Caracterización y distancia al mal planteamiento

Los siguientes ejemplos ilustran el resultado anterior.
Observar que lo único que necesitamos conocer son los coeficientes de los sistemas.

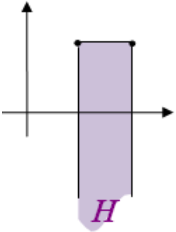
$\sigma = \{x \geq 1 \ , \ 2x \geq 1\}$



# Caracterización y distancia al mal planteamiento

Los siguientes ejemplos ilustran el resultado anterior.
Observar que lo único que necesitamos conocer son los coeficientes de los sistemas.

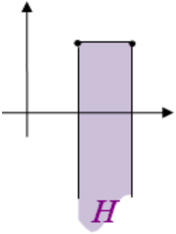
$\sigma = \{x \geq 1 \ , \ 2x \geq 1\}$




$0_2 \in ext\,(H)$

Los siguientes ejemplos ilustran el resultado anterior.
Observar que lo único que necesitamos conocer son los coeficientes de los sistemas.

$\sigma = \{x \geq 1 \text{ , } 2x \geq 1\}$

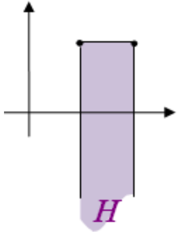



$0_2 \in ext\,(H)$

$\sigma \in ext\,(\Theta_{si}) = int\,(\Theta_c)$

Los siguientes ejemplos ilustran el resultado anterior.
Observar que lo único que necesitamos conocer son los coeficientes de los sistemas.

$\sigma = \{x \geq 1 \ , \ 2x \geq 1\}$



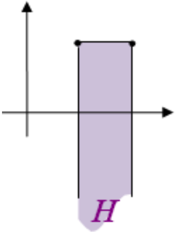

$$0_2 \in ext\,(H)$$

$$\sigma \in ext\,(\Theta_{si}) = int\,(\Theta_c)$$

$$d\,(\sigma, bd\,(\Theta_{si})) =$$
$$d\,(0_2, bd\,(H)) = 1$$

Los siguientes ejemplos ilustran el resultado anterior.
Observar que lo único que necesitamos conocer son los coeficientes de los sistemas.

$\sigma = \{x \geq 1 \;,\; 2x \geq 1\}$ $\quad \sigma = \left\{\frac{1}{t}x \geq 1 \;,\; t \in \mathbb{N}\right\}$




$$0_2 \in ext\,(H)$$

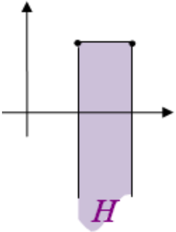
$$\sigma \in ext\,(\Theta_{si}) = int\,(\Theta_c)$$

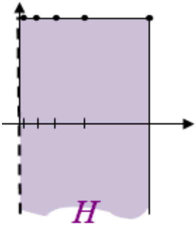
$$d\,(\sigma, bd\,(\Theta_{si})) =$$
$$d\,(0_2, bd\,(H)) = 1$$

# Caracterización y distancia al mal planteamiento

Los siguientes ejemplos ilustran el resultado anterior.
Observar que lo único que necesitamos conocer son los coeficientes de los sistemas.

$\sigma = \{x \geq 1\ ,\ 2x \geq 1\}$ $\quad$ $\sigma = \left\{\frac{1}{t}x \geq 1\ ,\ t \in \mathbb{N}\right\}$



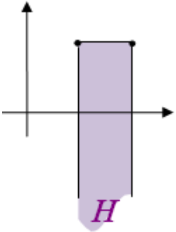

$$0_2 \in ext\,(H)$$

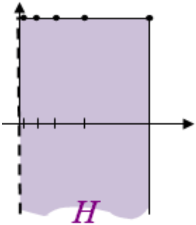
$$\sigma \in ext\,(\Theta_{si}) = int\,(\Theta_c)$$

$$d\,(\sigma, bd\,(\Theta_{si})) =$$
$$d\,(0_2, bd\,(H)) = 1$$

Los siguientes ejemplos ilustran el resultado anterior.
Observar que lo único que necesitamos conocer son los coeficientes de los sistemas.

$\sigma = \{x \geq 1 \text{ , } 2x \geq 1\}$ $\quad$ $\sigma = \left\{\frac{1}{t}x \geq 1 \text{ , } t \in \mathbb{N}\right\}$




$0_2 \in ext\,(H)$ $\qquad$ $0_2 \in bd\,(H)$

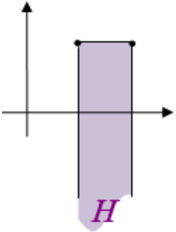
$$\sigma \in ext\,(\Theta_{si}) = int\,(\Theta_c)$$

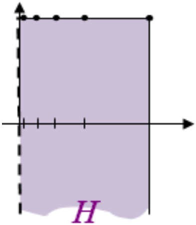
$$d\,(\sigma, bd\,(\Theta_{si})) =$$
$$d\,(0_2, bd\,(H)) = 1$$

Los siguientes ejemplos ilustran el resultado anterior.

Observar que lo único que necesitamos conocer son los coeficientes de los sistemas.

$\sigma = \{x \geq 1\ ,\ 2x \geq 1\}$ $\quad$ $\sigma = \left\{\frac{1}{t}x \geq 1\ ,\ t \in \mathbb{N}\right\}$




$0_2 \in ext\,(H)$ $\quad$ $0_2 \in bd\,(H)$

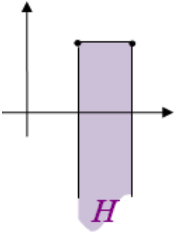
$\sigma \in ext\,(\Theta_{si}) = int\,(\Theta_c)$ $\quad$ $\sigma \in bd\,(\Theta_{si}) = bd\,(\Theta_c)$

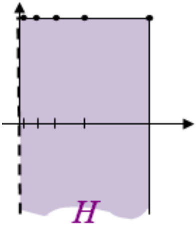
$$d\,(\sigma, bd\,(\Theta_{si})) =$$
$$d\,(0_2, bd\,(H)) = 1$$

# Caracterización y distancia al mal planteamiento

Los siguientes ejemplos ilustran el resultado anterior.
Observar que lo único que necesitamos conocer son los coeficientes de los sistemas.

$\sigma = \{x \geq 1 \ , \ 2x \geq 1\}$ $\quad$ $\sigma = \left\{\frac{1}{t}x \geq 1 \ , \ t \in \mathbb{N}\right\}$



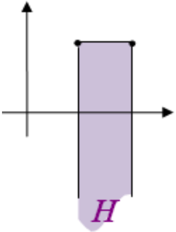

$$0_2 \in ext\left(H\right) \qquad 0_2 \in bd\left(H\right)$$

$$\sigma \in ext\left(\Theta_{si}\right) = int\left(\Theta_c\right) \qquad \sigma \in bd\left(\Theta_{si}\right) = bd\left(\Theta_c\right)$$

$$d\left(\sigma, bd\left(\Theta_{si}\right)\right) = d\left(0_2, bd\left(H\right)\right) = 1 \qquad d\left(\sigma, bd\left(\Theta_{si}\right)\right) = d\left(0_2, bd\left(H\right)\right) = 0$$

Los siguientes ejemplos ilustran el resultado anterior.
Observar que lo único que necesitamos conocer son los coeficientes de los sistemas.

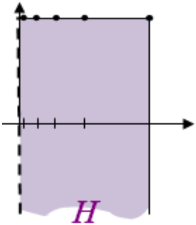
$\sigma = \{x \geq 1 \text{ , } 2x \geq 1\}$ $\quad$ $\sigma = \left\{\frac{1}{t}x \geq 1 \text{ , } t \in \mathbb{N}\right\}$ $\quad$ $\sigma = \{x \geq 1 \text{ , } -x \geq 1\}$




$0_2 \in ext\,(H)$

$\sigma \in ext\,(\Theta_{si}) = int\,(\Theta_c)$

$d\,(\sigma, bd\,(\Theta_{si})) =$
$d\,(0_2, bd\,(H)) = 1$




$0_2 \in bd\,(H)$

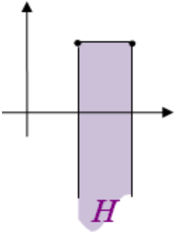
$\sigma \in bd\,(\Theta_{si}) = bd\,(\Theta_c)$

$d\,(\sigma, bd\,(\Theta_{si})) =$
$d\,(0_2, bd\,(H)) = 0$

# Caracterización y distancia al mal planteamiento

Los siguientes ejemplos ilustran el resultado anterior.
Observar que lo único que necesitamos conocer son los coeficientes de los sistemas.

$\sigma = \{x \geq 1 \, , \, 2x \geq 1\}$

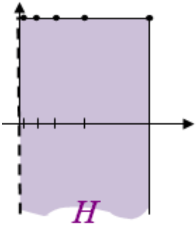



$0_2 \in ext\,(H)$

$\sigma \in ext\,(\Theta_{si}) = int\,(\Theta_c)$

$d\,(\sigma, bd\,(\Theta_{si})) = d\,(0_2, bd\,(H)) = 1$

$\sigma = \left\{\frac{1}{t} x \geq 1 \, , \, t \in \mathbb{N}\right\}$

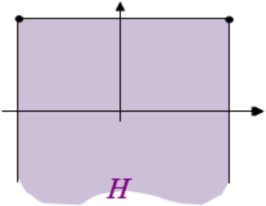



$0_2 \in bd\,(H)$

$\sigma \in bd\,(\Theta_{si}) = bd\,(\Theta_c)$

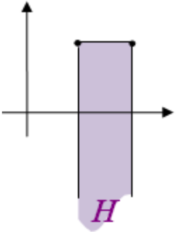
$d\,(\sigma, bd\,(\Theta_{si})) = d\,(0_2, bd\,(H)) = 0$

$\sigma = \{x \geq 1 \, , \, -x \geq 1\}$



Los siguientes ejemplos ilustran el resultado anterior.
Observar que lo único que necesitamos conocer son los coeficientes de los sistemas.

$\sigma = \{x \geq 1\ ,\ 2x \geq 1\}$

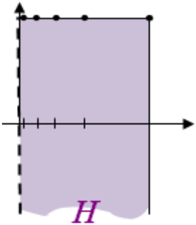



$0_2 \in ext\,(H)$

$\sigma \in ext\,(\Theta_{si}) = int\,(\Theta_c)$

$d\,(\sigma, bd\,(\Theta_{si})) = d\,(0_2, bd\,(H)) = 1$

$\sigma = \left\{\frac{1}{t}x \geq 1\ ,\ t \in \mathbb{N}\right\}$

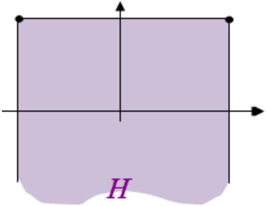



$0_2 \in bd\,(H)$

$\sigma \in bd\,(\Theta_{si}) = bd\,(\Theta_c)$

$d\,(\sigma, bd\,(\Theta_{si})) = d\,(0_2, bd\,(H)) = 0$

$\sigma = \{x \geq 1\ ,\ -x \geq 1\}$

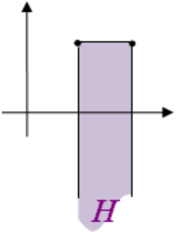



$0_2 \in int\,(H)$

# Caracterización y distancia al mal planteamiento

Los siguientes ejemplos ilustran el resultado anterior.
Observar que lo único que necesitamos conocer son los coeficientes de los sistemas.

$$\sigma = \{x \geq 1\ ,\ 2x \geq 1\}$$

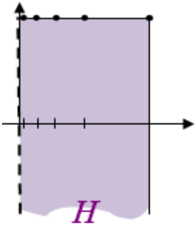



$$0_2 \in ext\,(H)$$

$$\sigma \in ext\,(\Theta_{si}) = int\,(\Theta_c)$$

$$d\,(\sigma, bd\,(\Theta_{si})) = d\,(0_2, bd\,(H)) = 1$$

$$\sigma = \left\{\tfrac{1}{t}x \geq 1\ ,\ t \in \mathbb{N}\right\}$$

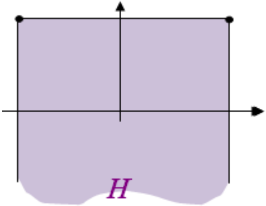



$$0_2 \in bd\,(H)$$

$$\sigma \in bd\,(\Theta_{si}) = bd\,(\Theta_c)$$

$$d\,(\sigma, bd\,(\Theta_{si})) = d\,(0_2, bd\,(H)) = 0$$

$$\sigma = \{x \geq 1\ ,\ -x \geq 1\}$$



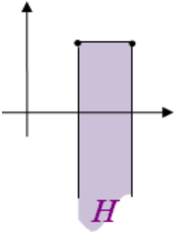

$$0_2 \in int\,(H)$$

$$\sigma \in int\,(\Theta_{si}) = int\,(\Theta_i)$$

# Caracterización y distancia al mal planteamiento

Los siguientes ejemplos ilustran el resultado anterior.
Observar que lo único que necesitamos conocer son los coeficientes de los sistemas.

$$\sigma = \{x \geq 1 \text{ , } 2x \geq 1\}$$

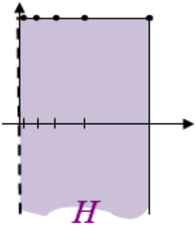



$$0_2 \in ext\,(H)$$

$$\sigma \in ext\,(\Theta_{si}) = int\,(\Theta_c)$$

$$d\,(\sigma, bd\,(\Theta_{si})) = d\,(0_2, bd\,(H)) = 1$$

$$\sigma = \left\{\tfrac{1}{t}x \geq 1 \text{ , } t \in \mathbb{N}\right\}$$

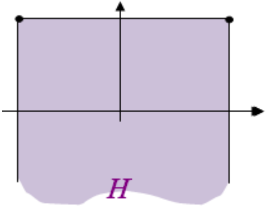



$$0_2 \in bd\,(H)$$

$$\sigma \in bd\,(\Theta_{si}) = bd\,(\Theta_c)$$

$$d\,(\sigma, bd\,(\Theta_{si})) = d\,(0_2, bd\,(H)) = 0$$

$$\sigma = \{x \geq 1 \text{ , } -x \geq 1\}$$




$$0_2 \in int\,(H)$$

$$\sigma \in int\,(\Theta_{si}) = int\,(\Theta_i)$$

$$d\,(\sigma, bd\,(\Theta_{si})) = d\,(0_2, bd\,(H)) = 1$$

# Sistemas convexos: definiciones

Nuestro objetivo a continuación es estudiar la estabilidad de sistemas convexos bajo perturbaciones afines .

# Sistemas convexos: definiciones

Nuestro objetivo a continuación es estudiar la estabilidad de sistemas convexos bajo perturbaciones afines . Por tanto, consideraramos **sistemas convexos parametrizados** de la forma

$$\sigma(a,b) := \{f_t(x) + \langle a_t, x\rangle \leq b_t,\ t \in T\} \tag{3}$$

# Sistemas convexos: definiciones

Nuestro objetivo a continuación es estudiar la estabilidad de sistemas convexos bajo perturbaciones afines . Por tanto, consideraramos **sistemas convexos parametrizados** de la forma

$$\sigma(a,b) := \{f_t(x) + \langle a_t, x\rangle \leq b_t,\ t \in T\} \tag{3}$$

Así, el sistema (3) es una perturbación del sistema nominal

$$\sigma(\theta_T, 0_T) := \{f_t(x) \leq 0,\ t \in T\}$$

# Sistemas convexos: definiciones

Nuestro objetivo a continuación es estudiar la estabilidad de sistemas convexos bajo perturbaciones afines . Por tanto, consideraramos **sistemas convexos parametrizados** de la forma

$$\sigma(a,b) := \{f_t(x) + \langle a_t, x\rangle \leq b_t,\ t \in T\} \tag{3}$$

Así, el sistema (3) es una perturbación del sistema nominal

$$\sigma(\theta_T, 0_T) := \{f_t(x) \leq 0,\ t \in T\}$$

Identificamos el sistema (3) con la función (parámetro)

$$(a,b) = (a_t, b_t)_{t\in T} \in (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})^T =: \Theta.$$

# Sistemas convexos: definiciones

Nuestro objetivo a continuación es estudiar la estabilidad de sistemas convexos bajo perturbaciones afines. Por tanto, consideraramos **sistemas convexos parametrizados** de la forma

$$\sigma(a,b) := \{f_t(x) + \langle a_t, x\rangle \leq b_t,\ t \in T\} \tag{3}$$

Así, el sistema (3) es una perturbación del sistema nominal

$$\sigma(\theta_T, 0_T) := \{f_t(x) \leq 0,\ t \in T\}$$

Identificamos el sistema (3) con la función (parámetro)

$$(a,b) = (a_t, b_t)_{t\in T} \in (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})^T =: \Theta.$$

Nos referiremos a $\Theta$ como el *espacio paramétrico*, el cual es un espacio métrico extendido cuando se le dota de la distancia extendida dada por

$$d\left(\left(a^1,b^1\right),\left(a^2,b^2\right)\right) := \sup_{t\in T}\left\|\left(a_t^1,b_t^1\right)-\left(a_t^2,b_t^2\right)\right\| \in [0,+\infty],$$

donde $\|\cdot\|$ es cualquier norma en $\mathbb{R}^{n+1}$.

# Sistemas convexos: definiciones

Denotaremos por $F(a,b)$ al conjunto factible de $\sigma(a,b)$.

# Sistemas convexos: definiciones

Denotaremos por $F(a,b)$ al conjunto factible de $\sigma(a,b)$.

Denotaremos por $\Theta_c$ al subconjunto de parámetros -sistemas- consistentes, y por $\Theta_i := \Theta \backslash \Theta_c$ al subconjunto de parámetros -sistemas- inconsistentes. Como en el caso lineal, $\Theta_i = \Theta_{si} \cup \Theta_{wi}$.

# Sistemas convexos: definiciones

Denotaremos por $F(a,b)$ al conjunto factible de $\sigma(a,b)$.

Denotaremos por $\Theta_c$ al subconjunto de parámetros -sistemas- consistentes, y por $\Theta_i := \Theta \backslash \Theta_c$ al subconjunto de parámetros -sistemas- inconsistentes. Como en el caso lineal, $\Theta_i = \Theta_{si} \cup \Theta_{wi}$.

Para una función convexa $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, definimos:

Denotaremos por $F(a,b)$ al conjunto factible de $\sigma(a,b)$.

Denotaremos por $\Theta_c$ al subconjunto de parámetros -sistemas- consistentes, y por $\Theta_i := \Theta \backslash \Theta_c$ al subconjunto de parámetros -sistemas- inconsistentes. Como en el caso lineal, $\Theta_i = \Theta_{si} \cup \Theta_{wi}$.

Para una función convexa $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, definimos:

El *dominio efectivo* de $f$: $\operatorname{dom} f := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < +\infty\}$.

# Sistemas convexos: definiciones

Denotaremos por $F(a,b)$ al conjunto factible de $\sigma(a,b)$.

Denotaremos por $\Theta_c$ al subconjunto de parámetros -sistemas- consistentes, y por $\Theta_i := \Theta \backslash \Theta_c$ al subconjunto de parámetros -sistemas- inconsistentes. Como en el caso lineal, $\Theta_i = \Theta_{si} \cup \Theta_{wi}$.

Para una función convexa $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, definimos:

El *dominio efectivo* de $f$: $\operatorname{dom} f := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < +\infty\}$.

El *grafo* de $f$: $\operatorname{gph} f := \{(x, f(x)) \mid x \in \operatorname{dom} f\}$.

# Sistemas convexos: definiciones

Denotaremos por $F(a,b)$ al conjunto factible de $\sigma(a,b)$.

Denotaremos por $\Theta_c$ al subconjunto de parámetros -sistemas- consistentes, y por $\Theta_i := \Theta \backslash \Theta_c$ al subconjunto de parámetros -sistemas- inconsistentes. Como en el caso lineal, $\Theta_i = \Theta_{si} \cup \Theta_{wi}$.

Para una función convexa $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, definimos:

El *dominio efectivo* de $f$: $\operatorname{dom} f := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < +\infty\}$.

El *grafo* de $f$: $\operatorname{gph} f := \{(x, f(x)) \mid x \in \operatorname{dom} f\}$.

El *epigrafo* de $f$:

$$\operatorname{epi} f := \{(x,\gamma) \mid x \in \mathbb{R}^n, \gamma \in \mathbb{R}, \gamma \geq f(x)\} = \operatorname{gph} f + \mathbb{R}_+ (0_n, 1).$$

# Sistemas convexos: definiciones

Denotaremos por $F(a,b)$ al conjunto factible de $\sigma(a,b)$.

Denotaremos por $\Theta_c$ al subconjunto de parámetros -sistemas- consistentes, y por $\Theta_i := \Theta \backslash \Theta_c$ al subconjunto de parámetros -sistemas- inconsistentes. Como en el caso lineal, $\Theta_i = \Theta_{si} \cup \Theta_{wi}$.

Para una función convexa $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, definimos:

El *dominio efectivo* de $f$: $\operatorname{dom} f := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < +\infty\}$.

El *grafo* de $f$: $\operatorname{gph} f := \{(x, f(x)) \mid x \in \operatorname{dom} f\}$.

El *epigrafo* de $f$:

$$\operatorname{epi} f := \{(x,\gamma) \mid x \in \mathbb{R}^n, \gamma \in \mathbb{R}, \gamma \geq f(x)\} = \operatorname{gph} f + \mathbb{R}_+ (0_n, 1).$$

La *conjugada de Fenchel-Legendre* de $f$ :

$$f^*(u) := \sup \{\langle u, x\rangle - f(x) : x \in \mathbb{R}^n\}.$$

# Caracterización de la consistencia de sistemas convexos

Asociados a $(a, b) \in \Theta$ consideramos los siguientes conjuntos convexos:

# Caracterización de la consistencia de sistemas convexos

Asociados a $(a,b) \in \Theta$ consideramos los siguientes conjuntos convexos:

$$N(a,b) := cone \bigcup_{t \in T} \left[ (a_t, b_t) + \operatorname{gph} f_t^* \right],$$

# Caracterización de la consistencia de sistemas convexos

Asociados a $(a,b) \in \Theta$ consideramos los siguientes conjuntos convexos:

$$N(a,b) := cone \bigcup_{t \in T} \left[ (a_t, b_t) + \mathrm{gph}\, f_t^* \right],$$

$$K(a,b) := cone \bigcup_{t \in T} \left[ (a_t, b_t) + \mathrm{epi}\, f_t^* \right],$$

# Caracterización de la consistencia de sistemas convexos

Asociados a $(a, b) \in \Theta$ consideramos los siguientes conjuntos convexos:

$$N(a,b) := cone \bigcup_{t \in T} \left[ (a_t, b_t) + \mathrm{gph}\, f_t^* \right],$$
$$K(a,b) := cone \bigcup_{t \in T} \left[ (a_t, b_t) + \mathrm{epi}\, f_t^* \right],$$
$$H(a,b) := conv \bigcup_{t \in T} \left[ (a_t, b_t) + \mathrm{epi}\, f_t^* \right].$$

# Caracterización de la consistencia de sistemas convexos

Asociados a $(a,b) \in \Theta$ consideramos los siguientes conjuntos convexos:

$$N(a,b) := \mathit{cone} \bigcup_{t\in T} \left[(a_t,b_t) + \operatorname{gph} f_t^*\right],$$
$$K(a,b) := \mathit{cone} \bigcup_{t\in T} \left[(a_t,b_t) + \operatorname{epi} f_t^*\right],$$
$$H(a,b) := \mathit{conv} \bigcup_{t\in T} \left[(a_t,b_t) + \operatorname{epi} f_t^*\right].$$

El siguiente resultado se obtiene directamente de un resultado de Dinh, Goberna y López y caracteriza la consistencia de sistemas convexos en el contexto actual.

# Caracterización de la consistencia de sistemas convexos

Asociados a $(a,b)\in\Theta$ consideramos los siguientes conjuntos convexos:

$$N(a,b) := cone \bigcup_{t\in T} \left[(a_t,b_t)+\operatorname{gph} f_t^*\right],$$
$$K(a,b) := cone \bigcup_{t\in T} \left[(a_t,b_t)+\operatorname{epi} f_t^*\right],$$
$$H(a,b) := conv \bigcup_{t\in T} \left[(a_t,b_t)+\operatorname{epi} f_t^*\right].$$

El siguiente resultado se obtiene directamente de un resultado de Dinh, Goberna y López y caracteriza la consistencia de sistemas convexos en el contexto actual.

Dado $(a,b)\in\Theta$ se tiene

$$(a,b)\in\Theta_c \Leftrightarrow (0_n,-1)\notin cl\,(N(a,b)) \Leftrightarrow (0_n,-1)\notin cl\,(K(a,b)).$$

# Linealización de sistemas convexos

Una desigualdad convexa de la forma $f(x) \leq 0$, es equivalente –en el sentido de que tienen el mismo conjunto factible– al sistema lineal

$$\{\langle u, x\rangle \leq f^*(u),\ u \in \mathrm{dom} f^*\}.$$

# Linealización de sistemas convexos

Una desigualdad convexa de la forma $f(x) \leq 0$ , es equivalente –en el sentido de que tienen el mismo conjunto factible– al sistema lineal

$$\{\langle u,x\rangle \leq f^*(u),\ u \in \mathrm{dom} f^*\}. \tag{4}$$

Aplicando este procedimiento a $\sigma(a,b)$ obtenemos el sistema lineal

$$\left\{\langle u,x\rangle + \langle a_t,x\rangle \leq f_t^*(u) + b_t,\ \ (t,u) \in \widetilde{T}\right\}, \tag{5}$$

donde $\widetilde{T} := \{(t,u) \in T \times \mathbb{R}^n \mid u \in \mathrm{dom} f_t^*\}$.

# Linealización de sistemas convexos

Una desigualdad convexa de la forma $f(x) \leq 0$, es equivalente –en el sentido de que tienen el mismo conjunto factible– al sistema lineal

$$\{\langle u, x\rangle \leq f^*(u),\ u \in \mathrm{dom} f^*\}. \tag{4}$$

Aplicando este procedimiento a $\sigma(a, b)$ obtenemos el sistema lineal

$$\left\{\langle u, x\rangle + \langle a_t, x\rangle \leq f_t^*(u) + b_t,\ \ (t, u) \in \widetilde{T}\right\}, \tag{5}$$

donde $\widetilde{T} := \{(t, u) \in T \times \mathbb{R}^n \mid u \in \mathrm{dom} f_t^*\}$.

Estos sistemas son una clase particular de sistemas lineales de la forma

$$\widetilde{\sigma}(\alpha, \beta) := \{\langle u, x\rangle + \langle \alpha_{tu}, x\rangle \leq f_t^*(u) + \beta_{tu},\ (t, u) \in \widetilde{T}\}, \tag{6}$$

con $(\alpha, \beta) = (\alpha_{tu}, \beta_{tu})_{(t,u)\in\widetilde{T}} \in (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})^{\widetilde{T}} =: \widetilde{\Theta}$.

# Linealización de sistemas convexos

Una desigualdad convexa de la forma $f(x) \leq 0$, es equivalente –en el sentido de que tienen el mismo conjunto factible– al sistema lineal

$$\left\{ \langle u, x \rangle \leq f^*(u),\ u \in \mathrm{dom} f^* \right\}. \tag{4}$$

Aplicando este procedimiento a $\sigma(a, b)$ obtenemos el sistema lineal

$$\left\{ \langle u, x \rangle + \langle a_t, x \rangle \leq f_t^*(u) + b_t,\ \ (t, u) \in \widetilde{T} \right\}, \tag{5}$$

donde $\widetilde{T} := \{(t, u) \in T \times \mathbb{R}^n \mid u \in \mathrm{dom} f_t^*\}$.

Estos sistemas son una clase particular de sistemas lineales de la forma

$$\widetilde{\sigma}(\alpha, \beta) := \{ \langle u, x \rangle + \langle \alpha_{tu}, x \rangle \leq f_t^*(u) + \beta_{tu},\ (t, u) \in \widetilde{T} \}, \tag{6}$$

con $(\alpha, \beta) = (\alpha_{tu}, \beta_{tu})_{(t,u) \in \widetilde{T}} \in (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})^{\widetilde{T}} =: \widetilde{\Theta}$.

Si para cada $(a, b) \in \Theta$ definimos $\left(\alpha^a, \beta^b\right) \in \widetilde{\Theta}$ por

$$\alpha_{tu}^a = a_t, \quad \beta_{tu}^b = b_t, \quad (t, u) \in \widetilde{T},$$

entonces el sistema linealizado (5) se puede escribir como $\widetilde{\sigma}(\alpha^a, \beta^b)$.

# Relaciones entre sistemas convexos y sus linealizados

En el *espacio paramétrico extendido* $\widetilde{\Theta}$ definimos la distancia extendida $\widetilde{d} : \widetilde{\Theta} \times \widetilde{\Theta} \to [0, +\infty]$ como

$$\widetilde{d}\left(\left(\alpha^1, \beta^1\right), \left(\alpha^2, \beta^2\right)\right) := \sup_{(t,u) \in \widetilde{T}} \left\| \left(\alpha^1_{tu}, \beta^1_{tu}\right) - \left(\alpha^2_{tu}, \beta^2_{tu}\right) \right\|.$$

# Relaciones entre sistemas convexos y sus linealizados

En el *espacio paramétrico extendido* $\widetilde{\Theta}$ definimos la distancia extendida $\widetilde{d} : \widetilde{\Theta} \times \widetilde{\Theta} \longrightarrow [0, +\infty]$ como

$$\widetilde{d}\left(\left(\alpha^1, \beta^1\right), \left(\alpha^2, \beta^2\right)\right) := \sup_{(t,u) \in \widetilde{T}} \left\| \left(\alpha^1_{tu}, \beta^1_{tu}\right) - \left(\alpha^2_{tu}, \beta^2_{tu}\right) \right\|.$$

Es evidente que

$$d\left(\left(a^1, b^1\right), \left(a^2, b^2\right)\right) = \widetilde{d}\left(\left(\alpha^{a^1}, \beta^{b^1}\right), \left(\alpha^{a^2}, \beta^{b^2}\right)\right), \ \forall \left(a^i, b^i\right) \in \Theta, i = 1, 2$$

# Relaciones entre sistemas convexos y sus linealizados

En el *espacio paramétrico extendido* $\widetilde{\Theta}$ definimos la distancia extendida $\widetilde{d} : \widetilde{\Theta} \times \widetilde{\Theta} \longrightarrow [0, +\infty]$ como

$$\widetilde{d}\left(\left(\alpha^1, \beta^1\right), \left(\alpha^2, \beta^2\right)\right) := \sup_{(t,u) \in \widetilde{T}} \left\| \left(\alpha^1_{tu}, \beta^1_{tu}\right) - \left(\alpha^2_{tu}, \beta^2_{tu}\right) \right\|.$$

Es evidente que

$$d\left(\left(a^1, b^1\right), \left(a^2, b^2\right)\right) = \widetilde{d}\left(\left(\alpha^{a^1}, \beta^{b^1}\right), \left(\alpha^{a^2}, \beta^{b^2}\right)\right), \ \forall \left(a^i, b^i\right) \in \Theta, i = 1, 2$$

En $\widetilde{\Theta}$ definimos análogamente a $\Theta$ los subconjuntos $\widetilde{\Theta}_c$, $\widetilde{\Theta}_i$, $\widetilde{\Theta}_{si}$ y $\widetilde{\Theta}_{wi}$.

# Relaciones entre sistemas convexos y sus linealizados

En el *espacio paramétrico extendido* $\widetilde{\Theta}$ definimos la distancia extendida $\widetilde{d}:\widetilde{\Theta}\times\widetilde{\Theta}\to[0,+\infty]$ como

$$\widetilde{d}\left(\left(\alpha^1,\beta^1\right),\left(\alpha^2,\beta^2\right)\right):=\sup_{(t,u)\in\widetilde{T}}\left\|\left(\alpha^1_{tu},\beta^1_{tu}\right)-\left(\alpha^2_{tu},\beta^2_{tu}\right)\right\|.$$

Es evidente que

$$d\left(\left(a^1,b^1\right),\left(a^2,b^2\right)\right)=\widetilde{d}\left(\left(\alpha^{a^1},\beta^{b^1}\right),\left(\alpha^{a^2},\beta^{b^2}\right)\right),\ \forall\left(a^i,b^i\right)\in\Theta, i=1,2$$

En $\widetilde{\Theta}$ definimos análogamente a $\Theta$ los subconjuntos $\widetilde{\Theta}_c$, $\widetilde{\Theta}_i$, $\widetilde{\Theta}_{si}$ y $\widetilde{\Theta}_{wi}$.

Como $\widetilde{\mathcal{F}}\left(\alpha^a,\beta^b\right)=\mathcal{F}(a,b)$ para todo $(a,b)\in\Theta$, es obvio que

$$(a,b)\in\Theta_c\Leftrightarrow\left(\alpha^a,\beta^b\right)\in\widetilde{\Theta}_c,\text{ y }(a,b)\in\Theta_i\Leftrightarrow\left(\alpha^a,\beta^b\right)\in\widetilde{\Theta}_i.$$

Esta situación no se extiende a $\Theta_{si}$ y a $\Theta_{wi}$.

# Relaciones entre sistemas convexos y sus linealizados

En el *espacio paramétrico extendido* $\widetilde{\Theta}$ definimos la distancia extendida $\widetilde{d} : \widetilde{\Theta} \times \widetilde{\Theta} \to [0, +\infty]$ como

$$\widetilde{d}\left(\left(\alpha^1, \beta^1\right), \left(\alpha^2, \beta^2\right)\right) := \sup_{(t,u) \in \widetilde{T}} \left\| \left(\alpha^1_{tu}, \beta^1_{tu}\right) - \left(\alpha^2_{tu}, \beta^2_{tu}\right) \right\|.$$

Es evidente que

$$d\left(\left(a^1, b^1\right), \left(a^2, b^2\right)\right) = \widetilde{d}\left(\left(\alpha^{a^1}, \beta^{b^1}\right), \left(\alpha^{a^2}, \beta^{b^2}\right)\right), \ \forall \left(a^i, b^i\right) \in \Theta, i = 1, 2$$

En $\widetilde{\Theta}$ definimos análogamente a $\Theta$ los subconjuntos $\widetilde{\Theta}_c$, $\widetilde{\Theta}_i$, $\widetilde{\Theta}_{si}$ y $\widetilde{\Theta}_{wi}$.

Como $\widetilde{\mathcal{F}}\left(\alpha^a, \beta^b\right) = \mathcal{F}(a, b)$ para todo $(a, b) \in \Theta$, es obvio que

$$(a, b) \in \Theta_c \Leftrightarrow \left(\alpha^a, \beta^b\right) \in \widetilde{\Theta}_c, \text{ y } (a, b) \in \Theta_i \Leftrightarrow \left(\alpha^a, \beta^b\right) \in \widetilde{\Theta}_i.$$

Esta situación no se extiende a $\Theta_{si}$ y a $\Theta_{wi}$.

Nuestro objetivo es caracterizar los sistemas convexos mal planteados, esto es, caracterizar el conjunto $bd\left(\Theta_c\right)$.

# Mal planteamiento de sistemas convexos

En el contexto actual tenemos de nuevo los subconjuntos

$$\begin{aligned}
\Theta_\infty \; &: \; = \left\{ (a,b) \in \Theta \mid d\left((a,b), bd\left(\Theta_c\right)\right) = +\infty \right\}, \\
\widetilde{\Theta}_\infty \; &: \; = \left\{ (\alpha,\beta) \in \widetilde{\Theta} \mid \widetilde{d}\left((\alpha,\beta), bd\left(\widetilde{\Theta}_c\right)\right) = +\infty \right\}.
\end{aligned}$$

# Mal planteamiento de sistemas convexos

En el contexto actual tenemos de nuevo los subconjuntos

$$\begin{aligned}\Theta_\infty &:= \{(a,b) \in \Theta \mid d((a,b), bd(\Theta_c)) = +\infty\},\\ \widetilde{\Theta}_\infty &:= \left\{(\alpha,\beta) \in \widetilde{\Theta} \mid \widetilde{d}\left((\alpha,\beta), bd\left(\widetilde{\Theta}_c\right)\right) = +\infty\right\}.\end{aligned}$$

Se tiene que $\Theta_\infty \subset int(\Theta_i)$ y, para $\left(\bar{a},\bar{b}\right) \in \Theta$

$$\left(\bar{a},\bar{b}\right) \in \Theta_\infty \Leftrightarrow \left(\alpha^{\bar{a}}, \beta^{\bar{b}}\right) \in \widetilde{\Theta}_\infty.$$

# Mal planteamiento de sistemas convexos

En el contexto actual tenemos de nuevo los subconjuntos

$$\begin{aligned} \Theta_{\infty} &: = \{(a,b) \in \Theta \mid d\left((a,b), bd\left(\Theta_c\right)\right) = +\infty\}, \\ \widetilde{\Theta}_{\infty} &: = \left\{(\alpha,\beta) \in \widetilde{\Theta} \mid \widetilde{d}\left((\alpha,\beta), bd\left(\widetilde{\Theta}_c\right)\right) = +\infty\right\}. \end{aligned}$$

Se tiene que $\Theta_{\infty} \subset int\left(\Theta_i\right)$ y, para $\left(\bar{a},\bar{b}\right) \in \Theta$

$$\left(\bar{a},\bar{b}\right) \in \Theta_{\infty} \Leftrightarrow \left(\alpha^{\bar{a}},\beta^{\bar{b}}\right) \in \widetilde{\Theta}_{\infty}.$$

**Caracterización de los sistemas convexos mal planteados**

Para $(a,b) \in \Theta \backslash \Theta_{\infty}$ se tiene que

$$(a,b) \in bd\left(\Theta_c\right) \Leftrightarrow \left(\alpha^{a},\beta^{b}\right) \in bd\left(\widetilde{\Theta}_c\right) \Leftrightarrow 0_{n+1} \in bd\left(H\left(a,b\right)\right).$$

# Mal planteamiento de sistemas convexos

En el contexto actual tenemos de nuevo los subconjuntos

$$\begin{aligned} \Theta_\infty &: = \left\{(a,b)\in\Theta \mid d\left((a,b),bd\left(\Theta_c\right)\right)=+\infty\right\}, \\ \widetilde{\Theta}_\infty &: = \left\{(\alpha,\beta)\in\widetilde{\Theta} \mid \widetilde{d}\left((\alpha,\beta),bd\left(\widetilde{\Theta}_c\right)\right)=+\infty\right\}. \end{aligned}$$

Se tiene que $\Theta_\infty \subset int\left(\Theta_i\right)$ y, para $\left(\overline{a},\overline{b}\right)\in\Theta$

$$\left(\overline{a},\overline{b}\right)\in\Theta_\infty \Leftrightarrow \left(\alpha^{\overline{a}},\beta^{\overline{b}}\right)\in\widetilde{\Theta}_\infty.$$

**Caracterización de los sistemas convexos mal planteados**

Para $(a,b)\in\Theta\backslash\Theta_\infty$ se tiene que

$$(a,b)\in bd\left(\Theta_c\right)\Leftrightarrow\left(\alpha^a,\beta^b\right)\in bd\left(\widetilde{\Theta}_c\right)\Leftrightarrow 0_{n+1}\in bd\left(H\left(a,b\right)\right).$$

**Distancia de un sistema convexo al mal planteamiento**

Si $\left(\theta_T,0_T\right)\in\Theta\backslash\Theta_\infty$ se tiene que

$$d\left(\left(\theta_T,0_T\right),bd\left(\Theta_c\right)\right)=\tilde{d}\left(\left(\alpha^{\theta_T},\beta^{0_T}\right),bd\left(\widetilde{\Theta}_c\right)\right)=d\left(0_{n+1},bd\left(H\left(\theta_T,0_T\right)\right)\right).$$

Consideremos el sistema nominal

$$\sigma\left(\theta_T, 0_T\right) := \left\{f_t\left(x\right) \leq 0 \ , \ t \in T := \{1,2\}\right\}$$

donde $f_1\left(x\right) := x^2 - x$ y $f_2\left(x\right) := x^2 + x - 1$.

Consideremos el sistema nominal

$$\sigma\left(\theta_T, 0_T\right) := \left\{f_t\left(x\right) \leq 0\ ,\ t \in T := \{1,2\}\right\}$$

donde $f_1\left(x\right) := x^2 - x$ y $f_2\left(x\right) := x^2 + x - 1$.

La linealización de $\sigma\left(\theta_T, 0_T\right)$ viene dada por

$$\widetilde{\sigma}\left(\alpha^{\theta_T}, \beta^{0_T}\right) := \left\{\langle u, x\rangle \leq f_t^*\left(u\right)\ ,\ (t,u) \in \widetilde{T}\right\}$$

donde $\widetilde{T} = \left\{(t,u) \in \{1,2\} \times \mathbb{R} \mid u \in dom\left(f_t^*\right)\right\}$.

Consideremos el sistema nominal

$$\sigma(\theta_T, 0_T) := \{f_t(x) \leq 0 \ , \ t \in T := \{1,2\}\}$$

donde $f_1(x) := x^2 - x$ y $f_2(x) := x^2 + x - 1$.

La linealización de $\sigma(\theta_T, 0_T)$ viene dada por

$$\widetilde{\sigma}\left(\alpha^{\theta_T}, \beta^{0_T}\right) := \left\{\langle u, x\rangle \leq f_t^*(u) \ , \ (t,u) \in \widetilde{T}\right\}$$

donde $\widetilde{T} = \{(t,u) \in \{1,2\} \times \mathbb{R} \mid u \in dom(f_t^*)\}$.

Es un simple ejercicio ver que

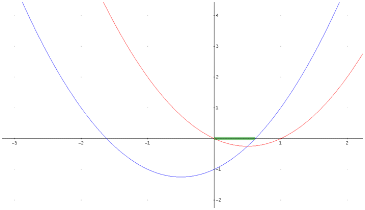
$$f_1^*(u) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \{\langle u, x\rangle - f_1(x)\} = \tfrac{1}{4}(u+1)^2$$
$$f_2^*(u) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \{\langle u, x\rangle - f_2(x)\} = \tfrac{1}{4}(u-1)^2 + 1$$

luego, $dom(f_t^*) = \mathbb{R}$ para $t = 1,2$, y $\widetilde{T} = \{1,2\} \times \mathbb{R}$.

# Mal planteamiento de sistemas convexos

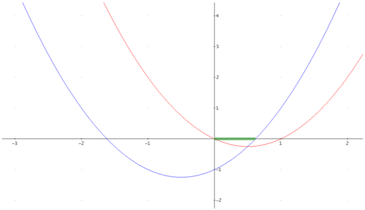
## Ejemplo

En este ejemplo $(\theta_T, 0_T) \in \Theta_c$ (luego $(\theta_T, 0_T) \in \Theta \backslash \Theta_\infty$), de hecho, $F(\theta_T, 0_T) = \left[0, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right]$ como se ve en la siguiente figura con las gráficas de $f_t$, $t = 1, 2$.

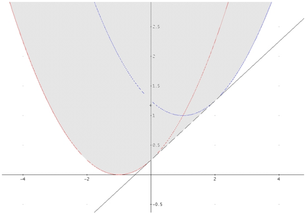


# Mal planteamiento de sistemas convexos
## Ejemplo

En este ejemplo $(\theta_T, 0_T) \in \Theta_c$ (luego $(\theta_T, 0_T) \in \Theta \backslash \Theta_\infty$), de hecho, $F(\theta_T, 0_T) = \left[0, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right]$ como se ve en la siguiente figura con las gráficas de $f_t$, $t = 1, 2$.



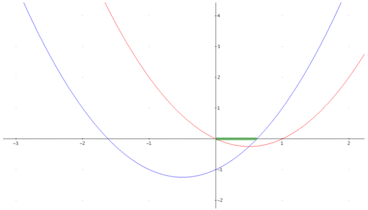
$$H(\theta_T, 0_T) = conv \bigcup_{t \in \{1,2\}} epi\left(f_t^*\right)$$



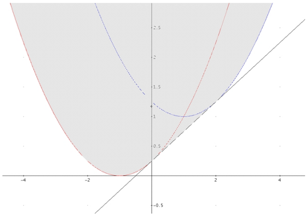
# Mal planteamiento de sistemas convexos

## Ejemplo

En este ejemplo $(\theta_T, 0_T) \in \Theta_c$ (luego $(\theta_T, 0_T) \in \Theta \backslash \Theta_\infty$), de hecho, $F(\theta_T, 0_T) = \left[0, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right]$ como se ve en la siguiente figura con las gráficas de $f_t$, $t = 1, 2$.



$$H(\theta_T, 0_T) = conv \bigcup_{t \in \{1,2\}} epi(f_t^*)$$



La distancia de $0_2$ a $bd(H(\theta_T, 0_T))$ se alcanza en la parábola $f_1^*(u) = \frac{1}{4}(u+1)^2$ en el punto $\left(u_0, \frac{1}{4}(u_0+1)^2\right)$ donde $u_0 = \frac{-(12\sqrt{177}-108)^{1/3}}{3} + \frac{(12\sqrt{177}+108)^{1/3}}{3} - 1 \approx -0.0932$

Se tiene que $d\left(0_2, bd\left(H\left(\theta_T, 0_T\right)\right)\right) = \sqrt{u_0^2 + \frac{1}{16}\left(u_0+1\right)^4} \approx 0.2257,$

# Mal planteamiento de sistemas convexos

## Ejemplo

Se tiene que $d\left(0_2, bd\left(H\left(\theta_T, 0_T\right)\right)\right) = \sqrt{u_0^2 + \frac{1}{16}\left(u_0+1\right)^4} \approx 0.2257$, y, la distancia al mal planteamiento $d\left(\left(\theta_T, 0_T\right), bd\left(\Theta_c\right)\right)$ se alcanza en $\left(u_T, v_T\right)$ donde $u_t = -u_0 \approx 0.0932$ y $v_t = -v_0 \approx -0.2055$, para $t = 1, 2$.

Se tiene que $d\left(0_2, bd\left(H\left(\theta_T, 0_T\right)\right)\right) = \sqrt{u_0^2 + \frac{1}{16}\left(u_0+1\right)^4} \approx 0.2257$, y, la distancia al mal planteamiento $d\left(\left(\theta_T, 0_T\right), bd\left(\Theta_c\right)\right)$ se alcanza en $\left(u_T, v_T\right)$ donde $u_t = -u_0 \approx 0.0932$ y $v_t = -v_0 \approx -0.2055$, para $t = 1, 2$.

El sistema mal planteado correspondiente es

$$\sigma\left(u_T, v_T\right) := \left\{f_t\left(x\right) + \langle u_t, x\rangle \leq v_t\ ,\ t \in T := \{1, 2\}\right\}$$

Se tiene que $d\left(0_2, bd\left(H\left(\theta_T, 0_T\right)\right)\right) = \sqrt{u_0^2 + \frac{1}{16}\left(u_0+1\right)^4} \approx 0.2257$, y, la distancia al mal planteamiento $d\left(\left(\theta_T, 0_T\right), bd\left(\Theta_c\right)\right)$ se alcanza en $\left(u_T, v_T\right)$ donde $u_t = -u_0 \approx 0.0932$ y $v_t = -v_0 \approx -0.2055$, para $t = 1,2$.

El sistema mal planteado correspondiente es

$$\sigma\left(u_T, v_T\right) := \left\{f_t\left(x\right) + \langle u_t, x\rangle \leq v_t\ ,\ t \in T := \{1,2\}\right\}, \text{ i.e.}$$

$$\sigma\left(u_T, v_T\right) := \left\{\begin{array}{l} x^2 - 0.9067x + 0.2055 \leq 0 \\ x^2 + 1.0932x - 0.7944 \leq 0 \end{array}\right\}$$

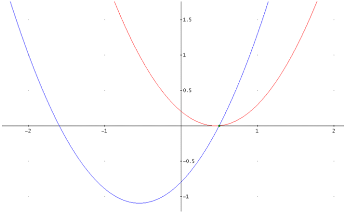
Se tiene que $d\left(0_2, bd\left(H\left(\theta_T, 0_T\right)\right)\right) = \sqrt{u_0^2 + \frac{1}{16}\left(u_0+1\right)^4} \approx 0.2257$, y, la distancia al mal planteamiento $d\left(\left(\theta_T, 0_T\right), bd\left(\Theta_c\right)\right)$ se alcanza en $\left(u_T, v_T\right)$ donde $u_t = -u_0 \approx 0.0932$ y $v_t = -v_0 \approx -0.2055$, para $t = 1, 2$.

El sistema mal planteado correspondiente es

$$\sigma\left(u_T, v_T\right) := \{f_t\left(x\right) + \langle u_t, x\rangle \leq v_t\ ,\ t \in T := \{1, 2\}\}, \text{ i.e.}$$

$$\sigma\left(u_T, v_T\right) := \left\{ \begin{array}{l} x^2 - 0.9067x + 0.2055 \leq 0 \\ x^2 + 1.0932x - 0.7944 \leq 0 \end{array} \right\}$$

Este sistema es consistente, de hecho su conjunto factible se reduce a un único punto $F\left(u_T, v_T\right) = \left\{\left(0.4534, 0\right)\right\}$.



# Problemas de optimización lineal:definiciones

A continuación consideramos el problema de optimización lineal

$$\begin{array}{rl} \pi : \text{Inf} & \langle c, x \rangle \\ \text{s.a} & \langle a_t, x \rangle \geq b_t, \ t \in T \end{array}$$

# Problemas de optimización lineal:definiciones

A continuación consideramos el problema de optimización lineal

$$\begin{array}{rl} \pi : \text{Inf} & \langle c, x \rangle \\ \text{s.a} & \langle a_t, x \rangle \geq b_t,\ t \in T \end{array} \tag{7}$$

Si representamos por $\sigma$ el sistema de restricciones, el problema $\pi$ puede identificarse con el par $(c, \sigma)$.

# Problemas de optimización lineal:definiciones

A continuación consideramos el problema de optimización lineal

$$\begin{array}{rl} \pi : \text{Inf} & \langle c, x \rangle \\ \text{s.a} & \langle a_t, x \rangle \geq b_t, \ t \in T \end{array} \tag{7}$$

Si representamos por $\sigma$ el sistema de restricciones, el problema $\pi$ puede identificarse con el par $(c, \sigma)$. Asociados a $\pi$ tenemos:

# Problemas de optimización lineal:definiciones

A continuación consideramos el problema de optimización lineal

$$\begin{array}{rl} \pi : \text{Inf} & \langle c, x\rangle \\ \text{s.a} & \langle a_t, x\rangle \geq b_t,\ t \in T \end{array} \tag{7}$$

Si representamos por $\sigma$ el sistema de restricciones, el problema $\pi$ puede identificarse con el par $(c, \sigma)$. Asociados a $\pi$ tenemos:

*Conjunto factible*: $F := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a_t, x\rangle \geq b_t\ \forall t \in T\}$

# Problemas de optimización lineal:definiciones

A continuación consideramos el problema de optimización lineal

$$\begin{aligned} \pi : \text{Inf} \quad & \langle c, x \rangle \\ \text{s.a} \quad & \langle a_t, x \rangle \geq b_t, \; t \in T \end{aligned} \tag{7}$$

Si representamos por $\sigma$ el sistema de restricciones, el problema $\pi$ puede identificarse con el par $(c, \sigma)$. Asociados a $\pi$ tenemos:

*Conjunto factible*: $F := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a_t, x \rangle \geq b_t \; \forall t \in T\}$

*Valor óptimo*: $v := \inf \{\langle c, x \rangle : x \in F\}$, $v := +\infty$ si $F = \emptyset$

# Problemas de optimización lineal:definiciones

A continuación consideramos el problema de optimización lineal

$$\begin{array}{rl} \pi : \text{Inf} & \langle c, x \rangle \\ \text{s.a} & \langle a_t, x \rangle \geq b_t,\ t \in T \end{array} \tag{7}$$

Si representamos por $\sigma$ el sistema de restricciones, el problema $\pi$ puede identificarse con el par $(c, \sigma)$. Asociados a $\pi$ tenemos:

*Conjunto factible*: $F := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a_t, x \rangle \geq b_t\ \forall t \in T\}$

*Valor óptimo*: $v := \inf \{\langle c, x \rangle : x \in F\}$, $v := +\infty$ si $F = \emptyset$

*Conjunto óptimo*: $F^{op} := \{x \in F : \langle c, x \rangle = v\}$

# Problemas de optimización lineal:definiciones

A continuación consideramos el problema de optimización lineal

$$\begin{array}{rll} \pi : \text{Inf} & \langle c, x\rangle & \\ \text{s.a} & \langle a_t, x\rangle \geq b_t, \ t \in T \end{array} \tag{7}$$

Si representamos por $\sigma$ el sistema de restricciones, el problema $\pi$ puede identificarse con el par $(c, \sigma)$. Asociados a $\pi$ tenemos:

*Conjunto factible*: $F := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a_t, x\rangle \geq b_t \ \forall t \in T\}$

*Valor óptimo*: $v := \inf\{\langle c, x\rangle : x \in F\}$, $v := +\infty$ si $F = \emptyset$

*Conjunto óptimo*: $F^{op} := \{x \in F : \langle c, x\rangle = v\}$

El espacio paramétrico de todos los problemas de la forma (7) lo denotamos por $\Pi$.

# Problemas de optimización lineal:definiciones

A continuación consideramos el problema de optimización lineal

$$\begin{aligned} \pi : \text{Inf} \quad & \langle c, x\rangle \\ \text{s.a} \quad & \langle a_t, x\rangle \geq b_t,\ t \in T \end{aligned} \tag{7}$$

Si representamos por $\sigma$ el sistema de restricciones, el problema $\pi$ puede identificarse con el par $(c, \sigma)$. Asociados a $\pi$ tenemos:

*Conjunto factible*: $F := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a_t, x\rangle \geq b_t \ \forall t \in T\}$

*Valor óptimo*: $v := \inf \{\langle c, x\rangle : x \in F\}$, $v := +\infty$ si $F = \emptyset$

*Conjunto óptimo*: $F^{op} := \{x \in F : \langle c, x\rangle = v\}$

El espacio paramétrico de todos los problemas de la forma (7) lo denotamos por $\Pi$. Distinguimos los siguientes subconjuntos en $\Pi$:

# Problemas de optimización lineal:definiciones

A continuación consideramos el problema de optimización lineal

$$\begin{array}{rl} \pi : \text{Inf} & \langle c, x\rangle \\ \text{s.a} & \langle a_t, x\rangle \geq b_t,\ t \in T \end{array} \tag{7}$$

Si representamos por $\sigma$ el sistema de restricciones, el problema $\pi$ puede identificarse con el par $(c, \sigma)$. Asociados a $\pi$ tenemos:

*Conjunto factible*: $F := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a_t, x\rangle \geq b_t\ \forall t \in T\}$

*Valor óptimo*: $v := \inf\{\langle c, x\rangle : x \in F\}$, $v := +\infty$ si $F = \emptyset$

*Conjunto óptimo*: $F^{op} := \{x \in F : \langle c, x\rangle = v\}$

El espacio paramétrico de todos los problemas de la forma (7) lo denotamos por $\Pi$. Distinguimos los siguientes subconjuntos en $\Pi$:

*Problemas consistentes*: $\Pi_c := \{\pi = (c, \sigma) \in \Pi \mid F \neq \emptyset\}$

# Problemas de optimización lineal:definiciones

A continuación consideramos el problema de optimización lineal

$$\begin{aligned} \pi : \text{Inf} \quad & \langle c, x \rangle \\ \text{s.a} \quad & \langle a_t, x \rangle \geq b_t, \ t \in T \end{aligned} \tag{7}$$

Si representamos por $\sigma$ el sistema de restricciones, el problema $\pi$ puede identificarse con el par $(c, \sigma)$. Asociados a $\pi$ tenemos:

*Conjunto factible*: $F := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a_t, x \rangle \geq b_t \ \forall t \in T\}$

*Valor óptimo*: $v := \inf \{\langle c, x \rangle : x \in F\}$, $v := +\infty$ si $F = \emptyset$

*Conjunto óptimo*: $F^{op} := \{x \in F : \langle c, x \rangle = v\}$

El espacio paramétrico de todos los problemas de la forma (7) lo denotamos por $\Pi$. Distinguimos los siguientes subconjuntos en $\Pi$:

*Problemas consistentes*: $\Pi_c := \{\pi = (c, \sigma) \in \Pi \mid F \neq \emptyset\}$
*Problemas inconsistentes*: $\Pi_i := \Pi \backslash \Pi_c$

# Problemas de optimización lineal:definiciones

A continuación consideramos el problema de optimización lineal

$$\begin{array}{rl} \pi : \mathsf{Inf} & \langle c, x\rangle \\ \mathsf{s.a} & \langle a_t, x\rangle \geq b_t,\ t \in T \end{array} \tag{7}$$

Si representamos por $\sigma$ el sistema de restricciones, el problema $\pi$ puede identificarse con el par $(c, \sigma)$. Asociados a $\pi$ tenemos:

*Conjunto factible*: $F := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a_t, x\rangle \geq b_t\ \forall t \in T\}$

*Valor óptimo*: $v := \inf\{\langle c, x\rangle : x \in F\}$, $v := +\infty$ si $F = \emptyset$

*Conjunto óptimo*: $F^{op} := \{x \in F : \langle c, x\rangle = v\}$

El espacio paramétrico de todos los problemas de la forma (7) lo denotamos por $\Pi$. Distinguimos los siguientes subconjuntos en $\Pi$:

*Problemas consistentes*: $\Pi_c := \{\pi = (c, \sigma) \in \Pi \mid F \neq \emptyset\}$
*Problemas inconsistentes*: $\Pi_i := \Pi \backslash \Pi_c$
*Problemas acotados*: $\Pi_b := \{\pi \in \Pi \mid -\infty < v < +\infty\}$

# Problemas de optimización lineal:definiciones

A continuación consideramos el problema de optimización lineal

$$\begin{array}{rll} \pi : \text{Inf} & \langle c, x \rangle & \\ \text{s.a} & \langle a_t, x \rangle \geq b_t, \ t \in T \end{array} \tag{7}$$

Si representamos por $\sigma$ el sistema de restricciones, el problema $\pi$ puede identificarse con el par $(c, \sigma)$. Asociados a $\pi$ tenemos:

*Conjunto factible*: $F := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a_t, x \rangle \geq b_t \ \forall t \in T\}$

*Valor óptimo*: $v := \inf \{\langle c, x \rangle : x \in F\}$, $v := +\infty$ si $F = \emptyset$

*Conjunto óptimo*: $F^{op} := \{x \in F : \langle c, x \rangle = v\}$

El espacio paramétrico de todos los problemas de la forma (7) lo denotamos por $\Pi$. Distinguimos los siguientes subconjuntos en $\Pi$:

*Problemas consistentes*: $\Pi_c := \{\pi = (c, \sigma) \in \Pi \mid F \neq \emptyset\}$
*Problemas inconsistentes*: $\Pi_i := \Pi \backslash \Pi_c$
*Problemas acotados*: $\Pi_b := \{\pi \in \Pi \mid -\infty < v < +\infty\}$
*Problemas resolubles*: $\Pi_s := \{\pi \in \Pi \mid F^{op} \neq \emptyset\}$

# Topología y conceptos de mal planteamiento

Dadas dos normas arbitrarias en $\mathbb{R}^n$ y en $\mathbb{R}^{n+1}$, denotadas ambas por $\|\cdot\|$, consideramos en $\Pi$ la distancia extendida $\delta : \Pi \times \Pi \to [0, +\infty]$ dada por

$$\delta(\pi_1, \pi) := \max\left\{ \left\| c^1 - c \right\|, d(\sigma_1, \sigma) \right\}$$

donde $d(\sigma_1, \sigma) := \sup_{t \in T} \left\| \begin{pmatrix} a_t^1 \\ b_t^1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix} \right\|$.

# Topología y conceptos de mal planteamiento

Dadas dos normas arbitrarias en $\mathbb{R}^n$ y en $\mathbb{R}^{n+1}$, denotadas ambas por $\|\cdot\|$, consideramos en $\Pi$ la distancia extendida $\delta : \Pi \times \Pi \to [0, +\infty]$ dada por

$$\delta\left(\pi_1, \pi\right) := \max\left\{\left\|c^1 - c\right\|, d\left(\sigma_1, \sigma\right)\right\}$$

donde $d\left(\sigma_1, \sigma\right) := \sup_{t \in T} \left\| \begin{pmatrix} a_t^1 \\ b_t^1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix} \right\|$.

Para $\pi \in \Pi$ y $\widetilde{\Pi} \subset \Pi$, $\delta(\pi, \widetilde{\Pi}) := \inf\left\{\delta\left(\pi, \widetilde{\pi}\right),\ \widetilde{\pi} \in \widetilde{\Pi}\right\} \in [0, +\infty]$.

# Topología y conceptos de mal planteamiento

Dadas dos normas arbitrarias en $\mathbb{R}^n$ y en $\mathbb{R}^{n+1}$, denotadas ambas por $\|\cdot\|$, consideramos en $\Pi$ la distancia extendida $\delta : \Pi \times \Pi \to [0, +\infty]$ dada por

$$\delta\left(\pi_1, \pi\right) := \max\left\{\left\|c^1 - c\right\|, d\left(\sigma_1, \sigma\right)\right\}$$

donde $d\left(\sigma_1, \sigma\right) := \sup_{t \in T} \left\| \begin{pmatrix} a_t^1 \\ b_t^1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix} \right\|$.

Para $\pi \in \Pi$ y $\widetilde{\Pi} \subset \Pi$, $\delta(\pi, \widetilde{\Pi}) := \inf\left\{\delta\left(\pi, \widetilde{\pi}\right),\ \widetilde{\pi} \in \widetilde{\Pi}\right\} \in [0, +\infty]$.

$\Pi$ es un espacio topológico con la topología inducida por $\delta$.

# Topología y conceptos de mal planteamiento

Dadas dos normas arbitrarias en $\mathbb{R}^n$ y en $\mathbb{R}^{n+1}$, denotadas ambas por $\|\cdot\|$, consideramos en $\Pi$ la distancia extendida $\delta : \Pi \times \Pi \to [0, +\infty]$ dada por

$$\delta(\pi_1, \pi) := \max\left\{\left\|c^1 - c\right\|, d(\sigma_1, \sigma)\right\}$$

donde $d(\sigma_1, \sigma) := \sup_{t\in T} \left\| \begin{pmatrix} a_t^1 \\ b_t^1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix} \right\|$.

Para $\pi \in \Pi$ y $\widetilde{\Pi} \subset \Pi$, $\delta(\pi, \widetilde{\Pi}) := \inf\left\{\delta(\pi, \widetilde{\pi}),\ \widetilde{\pi} \in \widetilde{\Pi}\right\} \in [0, +\infty]$.

$\Pi$ es un espacio topológico con la topología inducida por $\delta$.

**Conceptos de mal planteamiento**

De nuevo entendemos que un problema $\pi$ está mal planteado con respecto a una propiedad si perturbaciones arbitrariamente pequeñas de $\pi$ dan lugar tanto a problemas que tienen o no dicha propiedad, en este sentido podemos considerar diferentes tipos de mal planteamiento:

# Topología y conceptos de mal planteamiento

Dadas dos normas arbitrarias en $\mathbb{R}^n$ y en $\mathbb{R}^{n+1}$, denotadas ambas por $\|\cdot\|$, consideramos en $\Pi$ la distancia extendida $\delta : \Pi \times \Pi \to [0, +\infty]$ dada por

$$\delta(\pi_1, \pi) := \max\left\{\left\|c^1 - c\right\|, d(\sigma_1, \sigma)\right\}$$

donde $d(\sigma_1, \sigma) := \sup_{t \in T} \left\| \begin{pmatrix} a_t^1 \\ b_t^1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix} \right\|$.

Para $\pi \in \Pi$ y $\widetilde{\Pi} \subset \Pi$, $\delta(\pi, \widetilde{\Pi}) := \inf\left\{\delta(\pi, \widetilde{\pi}),\ \widetilde{\pi} \in \widetilde{\Pi}\right\} \in [0, +\infty]$.

$\Pi$ es un espacio topológico con la topología inducida por $\delta$.

**Conceptos de mal planteamiento**

De nuevo entendemos que un problema $\pi$ está mal planteado con respecto a una propiedad si perturbaciones arbitrariamente pequeñas de $\pi$ dan lugar tanto a problemas que tienen o no dicha propiedad, en este sentido podemos considerar diferentes tipos de mal planteamiento:

$$bd(\Pi_c),\ bd(\Pi_b),\ bd(\Pi_s)$$

# Mal planteamiento a estudiar

El mal planteamiento respecto de la consistencia ya ha sido estudiado.

# Mal planteamiento a estudiar

El mal planteamiento respecto de la consistencia ya ha sido estudiado.
En programación lineal ordinaria ($T$ finito) se tiene que $\Pi_s = \Pi_b$ pero esto no es cierto en el caso de la programación semi-infinita.

# Mal planteamiento a estudiar

El mal planteamiento respecto de la consistencia ya ha sido estudiado.
En programación lineal ordinaria ($T$ finito) se tiene que $\Pi_s = \Pi_b$ pero esto no es cierto en el caso de la programación semi-infinita.

**Ejemplo**: Consideremos el problema

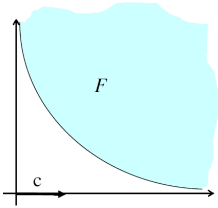
$$\begin{aligned} \pi : \text{Inf} \quad & x_1 \\ \text{s.a} \quad & x_1 + t^2 x_2 \geq t, \ t \in ]0, +\infty[ \end{aligned}$$

# Mal planteamiento a estudiar

El mal planteamiento respecto de la consistencia ya ha sido estudiado.
En programación lineal ordinaria ($T$ finito) se tiene que $\Pi_s = \Pi_b$ pero esto no es cierto en el caso de la programación semi-infinita.

**Ejemplo**: Consideremos el problema

$$\begin{array}{ll} \pi : \text{Inf} & x_1 \\ \quad\;\; \text{s.a} & x_1 + t^2 x_2 \geq t, \;\; t \in \,]0, +\infty[ \end{array}$$



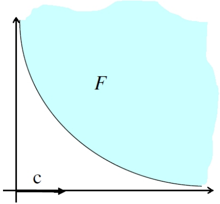

Se tiene que el valor óptimo es $v = 0$ pero no se alcanza en ningún punto de $F$, luego $F^{op} = \emptyset$.
Por tanto $\pi \in \Pi_b \backslash \Pi_s$.

# Mal planteamiento a estudiar

El mal planteamiento respecto de la consistencia ya ha sido estudiado. En programación lineal ordinaria ($T$ finito) se tiene que $\Pi_s = \Pi_b$ pero esto no es cierto en el caso de la programación semi-infinita.

**Ejemplo**: Consideremos el problema

$$\begin{aligned} \pi : \text{Inf} \quad & x_1 \\ \text{s.a} \quad & x_1 + t^2 x_2 \geq t, \ t \in ]0, +\infty[ \end{aligned}$$




Se tiene que el valor óptimo es $v = 0$ pero no se alcanza en ningún punto de $F$, luego $F^{op} = \emptyset$. Por tanto $\pi \in \Pi_b \backslash \Pi_s$.

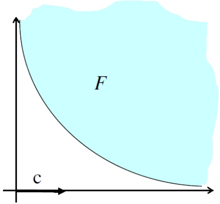
El siguiente resultado muestra que el conjunto de problemas mal planteados respecto de la acotación y respecto de la resolubilidad es el mismo.

# Mal planteamiento a estudiar

El mal planteamiento respecto de la consistencia ya ha sido estudiado. En programación lineal ordinaria ($T$ finito) se tiene que $\Pi_s = \Pi_b$ pero esto no es cierto en el caso de la programación semi-infinita.

**Ejemplo**: Consideremos el problema

$$\begin{array}{rl} \pi : \text{Inf} & x_1 \\ \text{s.a} & x_1 + t^2 x_2 \geq t, \ t \in ]0, +\infty[ \end{array}$$




Se tiene que el valor óptimo es $v = 0$ pero no se alcanza en ningún punto de $F$, luego $F^{op} = \emptyset$. Por tanto $\pi \in \Pi_b \backslash \Pi_s$.

El siguiente resultado muestra que el conjunto de problemas mal planteados respecto de la acotación y respecto de la resolubilidad es el mismo.

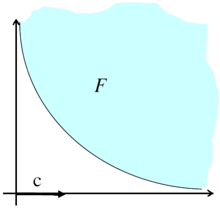
$$int\,(\Pi_s) = int\,(\Pi_b)\,;$$

# Mal planteamiento a estudiar

El mal planteamiento respecto de la consistencia ya ha sido estudiado.
En programación lineal ordinaria ($T$ finito) se tiene que $\Pi_s = \Pi_b$ pero esto no es cierto en el caso de la programación semi-infinita.

**Ejemplo**: Consideremos el problema

$$\begin{aligned} \pi : \text{Inf} \quad & x_1 \\ \text{s.a} \quad & x_1 + t^2 x_2 \geq t, \; t \in ]0, +\infty[ \end{aligned}$$




Se tiene que el valor óptimo es $v = 0$ pero no se alcanza en ningún punto de $F$, luego $F^{op} = \emptyset$.
Por tanto $\pi \in \Pi_b \backslash \Pi_s$.

El siguiente resultado muestra que el conjunto de problemas mal planteados respecto de la acotación y respecto de la resolubilidad es el mismo.

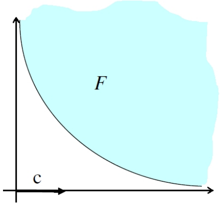
$$int\,(\Pi_s) = int\,(\Pi_b)\,;$$
$$ext\,(\Pi_s) = ext\,(\Pi_b)\,;$$

# Mal planteamiento a estudiar

El mal planteamiento respecto de la consistencia ya ha sido estudiado. En programación lineal ordinaria ($T$ finito) se tiene que $\Pi_s = \Pi_b$ pero esto no es cierto en el caso de la programación semi-infinita.

**Ejemplo**: Consideremos el problema

$$\begin{array}{ll} \pi : \text{Inf} & x_1 \\ \text{s.a} & x_1 + t^2 x_2 \geq t, \ t \in \left]0, +\infty\right[ \end{array}$$




Se tiene que el valor óptimo es $v = 0$ pero no se alcanza en ningún punto de $F$, luego $F^{op} = \varnothing$. Por tanto $\pi \in \Pi_b \backslash \Pi_s$.

El siguiente resultado muestra que el conjunto de problemas mal planteados respecto de la acotación y respecto de la resolubilidad es el mismo.

$$\begin{array}{c} int\left(\Pi_s\right) = int\left(\Pi_b\right); \\ ext\left(\Pi_s\right) = ext\left(\Pi_b\right); \\ bd\left(\Pi_s\right) = bd\left(\Pi_b\right). \end{array}$$

# Caracterización del mal planteamiento

Como $bd(\Pi_s) \subset cl(\Pi_s) \subset cl(\Pi_c)$, distinguieremos dos casos en el estudio de $bd(\Pi_s)$:

# Caracterización del mal planteamiento

Como $bd\left(\Pi_s\right) \subset cl\left(\Pi_s\right) \subset cl\left(\Pi_c\right)$, distinguieremos dos casos en el estudio de $bd\left(\Pi_s\right)$: $int\left(\Pi_c\right)$ y $bd\left(\Pi_c\right)$.

# Caracterización del mal planteamiento

Como $bd(\Pi_s) \subset cl(\Pi_s) \subset cl(\Pi_c)$, distinguieremos dos casos en el estudio de $bd(\Pi_s)$: $int(\Pi_c)$ y $bd(\Pi_c)$.

**Caracterización en $int(\Pi_c)$**

Dado $\pi = (c, \sigma)$, definimos

$$Z^- := conv(\{a_t, t \in T; -c\}).$$

# Caracterización del mal planteamiento

Como $bd(\Pi_s) \subset cl(\Pi_s) \subset cl(\Pi_c)$, distinguieremos dos casos en el estudio de $bd(\Pi_s)$: $int(\Pi_c)$ y $bd(\Pi_c)$.

**Caracterización en $int(\Pi_c)$**

Dado $\pi = (c, \sigma)$, definimos

$$Z^- := conv(\{a_t, t \in T; -c\}).$$

Si $\pi \in int(\Pi_c)$, se tiene que

# Caracterización del mal planteamiento

Como $bd(\Pi_s) \subset cl(\Pi_s) \subset cl(\Pi_c)$, distinguieremos dos casos en el estudio de $bd(\Pi_s)$: $int(\Pi_c)$ y $bd(\Pi_c)$.

**Caracterización en $int(\Pi_c)$**

Dado $\pi = (c, \sigma)$, definimos

$$Z^- := conv(\{a_t, t \in T; -c\}).$$

Si $\pi \in int(\Pi_c)$, se tiene que

$\pi \in int(\Pi_s) \Leftrightarrow 0_n \in int(Z^-)$;

# Caracterización del mal planteamiento

Como $bd\,(\Pi_s) \subset cl\,(\Pi_s) \subset cl\,(\Pi_c)$, distinguieremos dos casos en el estudio de $bd\,(\Pi_s)$: $int\,(\Pi_c)$ y $bd\,(\Pi_c)$.

**Caracterización en $int\,(\Pi_c)$**

Dado $\pi = (c, \sigma)$, definimos

$$Z^- := conv\,(\{a_t\,,\, t \in T\,;\, -c\})\,.$$

Si $\pi \in int\,(\Pi_c)$, se tiene que

$\pi \in int\,(\Pi_s) \Leftrightarrow 0_n \in int\,(Z^-)\,;$

$\pi \in bd\,(\Pi_s) \Leftrightarrow 0_n \in bd\,(Z^-)\,;$

# Caracterización del mal planteamiento

Como $bd\,(\Pi_s) \subset cl\,(\Pi_s) \subset cl\,(\Pi_c)$, distinguieremos dos casos en el estudio de $bd\,(\Pi_s)$: $int\,(\Pi_c)$ y $bd\,(\Pi_c)$.

**Caracterización en** $int\,(\Pi_c)$

Dado $\pi = (c, \sigma)$, definimos

$$Z^- := conv\,(\{a_t\,,\, t \in T\,;\, -c\})\,.$$

Si $\pi \in int\,(\Pi_c)$, se tiene que

$\pi \in int\,(\Pi_s) \Leftrightarrow 0_n \in int\,(Z^-)\,;$

$\pi \in bd\,(\Pi_s) \Leftrightarrow 0_n \in bd\,(Z^-)\,;$

$\pi \in ext\,(\Pi_s) \Leftrightarrow 0_n \in ext\,(Z^-)$

# Caracterización del mal planteamiento

Como $bd\,(\Pi_s) \subset cl\,(\Pi_s) \subset cl\,(\Pi_c)$, distinguieremos dos casos en el estudio de $bd\,(\Pi_s)$: $int\,(\Pi_c)$ y $bd\,(\Pi_c)$.

**Caracterización en $int\,(\Pi_c)$**

Dado $\pi = (c, \sigma)$, definimos

$$Z^- := conv\,(\{a_t\,,\,t \in T\,;\,-c\})\,.$$

Si $\pi \in int\,(\Pi_c)$, se tiene que

$\pi \in int\,(\Pi_s) \Leftrightarrow 0_n \in int\,(Z^-)\,;$

$\pi \in bd\,(\Pi_s) \Leftrightarrow 0_n \in bd\,(Z^-)\,;$

$\pi \in ext\,(\Pi_s) \Leftrightarrow 0_n \in ext\,(Z^-)$

**Caracterización en $bd\,(\Pi_c)$**

Dado $\pi = (c, \sigma)$, definimos

$$Z^+ := conv\,(\{a_t\,,\,t \in T\,;\,c\})$$

# Caracterización del mal planteamiento

Como $bd(\Pi_s) \subset cl(\Pi_s) \subset cl(\Pi_c)$, distinguieremos dos casos en el estudio de $bd(\Pi_s)$: $int(\Pi_c)$ y $bd(\Pi_c)$.

**Caracterización en** $int(\Pi_c)$

Dado $\pi = (c, \sigma)$, definimos

$$Z^- := conv(\{a_t, t \in T; -c\}).$$

Si $\pi \in int(\Pi_c)$, se tiene que

$\pi \in int(\Pi_s) \Leftrightarrow 0_n \in int(Z^-)$;
$\pi \in bd(\Pi_s) \Leftrightarrow 0_n \in bd(Z^-)$;
$\pi \in ext(\Pi_s) \Leftrightarrow 0_n \in ext(Z^-)$

**Caracterización en** $bd(\Pi_c)$

Dado $\pi = (c, \sigma)$, definimos

$$Z^+ := conv(\{a_t, t \in T; c\})$$

Si $\pi \in bd(\Pi_c)$, se tiene que
$\pi \in bd(\Pi_s)$ si y sólo si,

# Caracterización del mal planteamiento

Como $bd(\Pi_s) \subset cl(\Pi_s) \subset cl(\Pi_c)$, distinguieremos dos casos en el estudio de $bd(\Pi_s)$: $int(\Pi_c)$ y $bd(\Pi_c)$.

**Caracterización en $int(\Pi_c)$**

Dado $\pi = (c, \sigma)$, definimos

$$Z^- := conv(\{a_t, t \in T; -c\}).$$

Si $\pi \in int(\Pi_c)$, se tiene que

$\pi \in int(\Pi_s) \Leftrightarrow 0_n \in int(Z^-)$;

$\pi \in bd(\Pi_s) \Leftrightarrow 0_n \in bd(Z^-)$;

$\pi \in ext(\Pi_s) \Leftrightarrow 0_n \in ext(Z^-)$

**Caracterización en $bd(\Pi_c)$**

Dado $\pi = (c, \sigma)$, definimos

$$Z^+ := conv(\{a_t, t \in T; c\})$$

Si $\pi \in bd(\Pi_c)$, se tiene que

$\pi \in bd(\Pi_s)$ si y sólo si,

bien $\pi \in cl(bd(\Pi_c) \cap \Pi_c)$,

# Caracterización del mal planteamiento

Como $bd(\Pi_s) \subset cl(\Pi_s) \subset cl(\Pi_c)$, distinguieremos dos casos en el estudio de $bd(\Pi_s)$: $int(\Pi_c)$ y $bd(\Pi_c)$.

**Caracterización en $int(\Pi_c)$**

Dado $\pi = (c, \sigma)$, definimos

$$Z^- := conv(\{a_t, t \in T; -c\}).$$

Si $\pi \in int(\Pi_c)$, se tiene que

$\pi \in int(\Pi_s) \Leftrightarrow 0_n \in int(Z^-)$;
$\pi \in bd(\Pi_s) \Leftrightarrow 0_n \in bd(Z^-)$;
$\pi \in ext(\Pi_s) \Leftrightarrow 0_n \in ext(Z^-)$

**Caracterización en $bd(\Pi_c)$**

Dado $\pi = (c, \sigma)$, definimos

$$Z^+ := conv(\{a_t, t \in T; c\})$$

Si $\pi \in bd(\Pi_c)$, se tiene que
$\pi \in bd(\Pi_s)$ si y sólo si,
bien $\pi \in cl(bd(\Pi_c) \cap \Pi_c)$,
o bien $0_n \in bd(Z^+)$.

# Caracterización del mal planteamiento

Como $bd\,(\Pi_s) \subset cl\,(\Pi_s) \subset cl\,(\Pi_c)$, distinguieremos dos casos en el estudio de $bd\,(\Pi_s)$: $int\,(\Pi_c)$ y $bd\,(\Pi_c)$.

**Caracterización en $int\,(\Pi_c)$**

Dado $\pi = (c, \sigma)$, definimos

$$Z^- := conv\,(\{a_t\,,\, t \in T\,;\, -c\}).$$

Si $\pi \in int\,(\Pi_c)$, se tiene que

$\pi \in int\,(\Pi_s) \Leftrightarrow 0_n \in int\,(Z^-)$;

$\pi \in bd\,(\Pi_s) \Leftrightarrow 0_n \in bd\,(Z^-)$;

$\pi \in ext\,(\Pi_s) \Leftrightarrow 0_n \in ext\,(Z^-)$

**Caracterización en $bd\,(\Pi_c)$**

Dado $\pi = (c, \sigma)$, definimos

$$Z^+ := conv\,(\{a_t\,,\, t \in T\,;\, c\})$$

Si $\pi \in bd\,(\Pi_c)$, se tiene que

$\pi \in bd\,(\Pi_s)$ si y sólo si,

bien $\pi \in cl\,(bd\,(\Pi_c) \cap \Pi_c)$,

o bien $0_n \in bd\,(Z^+)$.

Recordar $C := conv\left(\left\{\begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix},\ t \in T\right\}\right)$.

# Caracterización del mal planteamiento

Como $bd(\Pi_s) \subset cl(\Pi_s) \subset cl(\Pi_c)$, distinguieremos dos casos en el estudio de $bd(\Pi_s)$: $int(\Pi_c)$ y $bd(\Pi_c)$.

**Caracterización en $int(\Pi_c)$**

Dado $\pi = (c, \sigma)$, definimos

$$Z^- := conv(\{a_t, t \in T; -c\}).$$

Si $\pi \in int(\Pi_c)$, se tiene que

$\pi \in int(\Pi_s) \Leftrightarrow 0_n \in int(Z^-)$;

$\pi \in bd(\Pi_s) \Leftrightarrow 0_n \in bd(Z^-)$;

$\pi \in ext(\Pi_s) \Leftrightarrow 0_n \in ext(Z^-)$

**Caracterización en $bd(\Pi_c)$**

Dado $\pi = (c, \sigma)$, definimos

$$Z^+ := conv(\{a_t, t \in T; c\})$$

Si $\pi \in bd(\Pi_c)$, se tiene que

$\pi \in bd(\Pi_s)$ si y sólo si,

bien $\pi \in cl(bd(\Pi_c) \cap \Pi_c)$,

o bien $0_n \in bd(Z^+)$.

Recordar $C := conv\left(\left\{\begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix}, \ t \in T\right\}\right)$.

En el caso $\pi \in bd(\Pi_c)$ se tiene:

# Caracterización del mal planteamiento

Como $bd\,(\Pi_s) \subset cl\,(\Pi_s) \subset cl\,(\Pi_c)$, distinguieremos dos casos en el estudio de $bd\,(\Pi_s)$: $int\,(\Pi_c)$ y $bd\,(\Pi_c)$.

**Caracterización en $int\,(\Pi_c)$**

Dado $\pi = (c, \sigma)$, definimos

$$Z^- := conv\,(\{a_t\,,\, t \in T\,;\, -c\})\,.$$

Si $\pi \in int\,(\Pi_c)$, se tiene que

$\pi \in int\,(\Pi_s) \Leftrightarrow 0_n \in int\,(Z^-)\,;$

$\pi \in bd\,(\Pi_s) \Leftrightarrow 0_n \in bd\,(Z^-)\,;$

$\pi \in ext\,(\Pi_s) \Leftrightarrow 0_n \in ext\,(Z^-)$

**Caracterización en $bd\,(\Pi_c)$**

Dado $\pi = (c, \sigma)$, definimos

$$Z^+ := conv\,(\{a_t\,,\, t \in T\,;\, c\})$$

Si $\pi \in bd\,(\Pi_c)$, se tiene que

$\pi \in bd\,(\Pi_s)$ si y sólo si,

bien $\pi \in cl\,(bd\,(\Pi_c) \cap \Pi_c)$,

o bien $0_n \in bd\,(Z^+)$.

Recordar $C := conv\left(\left\{\begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix},\ t \in T\right\}\right)$.

En el caso $\pi \in bd\,(\Pi_c)$ se tiene: $\pi \in cl\,(bd\,(\Pi_c) \cap \Pi_c) \Rightarrow 0_{n+1} \in bd\ (C)$

# Caracterización del mal planteamiento

Como $bd(\Pi_s) \subset cl(\Pi_s) \subset cl(\Pi_c)$, distinguieremos dos casos en el estudio de $bd(\Pi_s)$: $int(\Pi_c)$ y $bd(\Pi_c)$.

**Caracterización en $int(\Pi_c)$**

Dado $\pi = (c, \sigma)$, definimos

$$Z^- := conv(\{a_t, t \in T; -c\}).$$

Si $\pi \in int(\Pi_c)$, se tiene que

$\pi \in int(\Pi_s) \Leftrightarrow 0_n \in int(Z^-)$;

$\pi \in bd(\Pi_s) \Leftrightarrow 0_n \in bd(Z^-)$;

$\pi \in ext(\Pi_s) \Leftrightarrow 0_n \in ext(Z^-)$

**Caracterización en $bd(\Pi_c)$**

Dado $\pi = (c, \sigma)$, definimos

$$Z^+ := conv(\{a_t, t \in T; c\})$$

Si $\pi \in bd(\Pi_c)$, se tiene que

$\pi \in bd(\Pi_s)$ si y sólo si,

bien $\pi \in cl(bd(\Pi_c) \cap \Pi_c)$,

o bien $0_n \in bd(Z^+)$.

Recordar $C := conv\left(\left\{\begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix}, t \in T\right\}\right)$.

En el caso $\pi \in bd(\Pi_c)$ se tiene: $\pi \in cl(bd(\Pi_c) \cap \Pi_c) \Rightarrow 0_{n+1} \in bd\ (C)$

Cuando $\{b_t, t \in T\}$ está acotado se tiene:

# Caracterización del mal planteamiento

Como $bd\,(\Pi_s) \subset cl\,(\Pi_s) \subset cl\,(\Pi_c)$, distinguieremos dos casos en el estudio de $bd\,(\Pi_s)$: $int\,(\Pi_c)$ y $bd\,(\Pi_c)$.

**Caracterización en $int\,(\Pi_c)$**

Dado $\pi = (c, \sigma)$, definimos

$$Z^- := conv\,(\{a_t\,,\, t \in T\,;\, -c\})\,.$$

Si $\pi \in int\,(\Pi_c)$, se tiene que

$\pi \in int\,(\Pi_s) \Leftrightarrow 0_n \in int\,(Z^-)\,;$

$\pi \in bd\,(\Pi_s) \Leftrightarrow 0_n \in bd\,(Z^-)\,;$

$\pi \in ext\,(\Pi_s) \Leftrightarrow 0_n \in ext\,(Z^-)$

**Caracterización en $bd\,(\Pi_c)$**

Dado $\pi = (c, \sigma)$, definimos

$$Z^+ := conv\,(\{a_t\,,\, t \in T\,;\, c\})$$

Si $\pi \in bd\,(\Pi_c)$, se tiene que

$\pi \in bd\,(\Pi_s)$ si y sólo si,

bien $\pi \in cl\,(bd\,(\Pi_c) \cap \Pi_c)$,

o bien $0_n \in bd\,(Z^+)\,.$

Recordar $C := conv\left(\left\{\begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix},\ t \in T\right\}\right)$.

En el caso $\pi \in bd\,(\Pi_c)$ se tiene: $\pi \in cl\,(bd\,(\Pi_c) \cap \Pi_c) \Rightarrow 0_{n+1} \in bd\ (C)$

Cuando $\{b_t\,,\, t \in T\}$ está acotado se tiene:

$$\pi \in cl\,(bd\,(\Pi_c) \cap \Pi_c) \Leftrightarrow 0_{n+1} \in bd\ (C)$$

**Caracterización del mal planteamiento**

**Caracterización del mal planteamiento**

Sea $\pi \in \Pi$ con $\{b_t\,,\, t \in T\}$ acotado

**Caracterización del mal planteamiento**

Sea $\pi \in \Pi$ con $\{b_t, t \in T\}$ acotado, entonces $\pi \in bd(\Pi_s)$ si y sólo si se cumple alguna de las siguientes condiciones:

**Caracterización del mal planteamiento**

Sea $\pi \in \Pi$ con $\{b_t\,,\, t \in T\}$ acotado, entonces $\pi \in bd\,(\Pi_s)$ si y sólo si se cumple alguna de las siguientes condiciones:

$0_{n+1} \in ext\,(H)$ y $0_n \in bd\,(Z^-)$ ;

**Caracterización del mal planteamiento**

Sea $\pi \in \Pi$ con $\{b_t\, , \, t \in T\}$ acotado, entonces $\pi \in bd\,(\Pi_s)$ si y sólo si se cumple alguna de las siguientes condiciones:

$0_{n+1} \in ext\,(H)$ y $0_n \in bd\,(Z^-)\,;$

$0_{n+1} \in bd\,(H) \cap bd\,(C)\,;$

**Caracterización del mal planteamiento**

Sea $\pi \in \Pi$ con $\{b_t\, ,\, t \in T\}$ acotado, entonces $\pi \in bd\,(\Pi_s)$ si y sólo si se cumple alguna de las siguientes condiciones:

$0_{n+1} \in ext\,(H)$ y $0_n \in bd\,(Z^-)\,;$

$0_{n+1} \in bd\,(H) \cap bd\,(C)\,;$

$0_{n+1} \in bd\,(H)$ y $0_n \in bd\,(Z^+)\,.$

**Caracterización del mal planteamiento**

Sea $\pi \in \Pi$ con $\{b_t\,,\, t \in T\}$ acotado, entonces $\pi \in bd\,(\Pi_s)$ si y sólo si se cumple alguna de las siguientes condiciones:

$0_{n+1} \in ext\,(H)$ y $0_n \in bd\,(Z^-)\,;$

$0_{n+1} \in bd\,(H) \cap bd\,(C)\,;$

$0_{n+1} \in bd\,(H)$ y $0_n \in bd\,(Z^+)\,.$

**Distancia al mal planteamiento**

# Caracterización del mal planteamiento y distancia al mismo

**Caracterización del mal planteamiento**

Sea $\pi \in \Pi$ con $\{b_t\,,\, t \in T\}$ acotado, entonces $\pi \in bd\,(\Pi_s)$ si y sólo si se cumple alguna de las siguientes condiciones:

$0_{n+1} \in ext\,(H)$ y $0_n \in bd\,(Z^-)\,;$

$0_{n+1} \in bd\,(H) \cap bd\,(C)\,;$

$0_{n+1} \in bd\,(H)$ y $0_n \in bd\,(Z^+)\,.$

**Distancia al mal planteamiento**

Sea $\pi \in \Pi \backslash \Pi_\infty$.

**Caracterización del mal planteamiento**

Sea $\pi \in \Pi$ con $\{b_t\, , t \in T\}$ acotado, entonces $\pi \in bd\left(\Pi_s\right)$ si y sólo si se cumple alguna de las siguientes condiciones:

$0_{n+1} \in ext\left(H\right)$ y $0_n \in bd\left(Z^-\right)$;

$0_{n+1} \in bd\left(H\right) \cap bd\left(C\right)$;

$0_{n+1} \in bd\left(H\right)$ y $0_n \in bd\left(Z^+\right)$.

**Distancia al mal planteamiento**

Sea $\pi \in \Pi \backslash \Pi_\infty$. Supongamos que se tiene alguna de las siguientes condiciones:

# Caracterización del mal planteamiento y distancia al mismo

**Caracterización del mal planteamiento**

Sea $\pi \in \Pi$ con $\{b_t\,,\, t \in T\}$ acotado, entonces $\pi \in bd\,(\Pi_s)$ si y sólo si se cumple alguna de las siguientes condiciones:

$0_{n+1} \in ext\,(H)$ y $0_n \in bd\,(Z^-)\,;$

$0_{n+1} \in bd\,(H) \cap bd\,(C)\,;$

$0_{n+1} \in bd\,(H)$ y $0_n \in bd\,(Z^+)\,.$

**Distancia al mal planteamiento**

Sea $\pi \in \Pi \backslash \Pi_\infty$. Supongamos que se tiene alguna de las siguientes condiciones:

$\pi \in cl\,(\Pi_s)\,;$

**Caracterización del mal planteamiento**

Sea $\pi \in \Pi$ con $\{b_t\,,\, t \in T\}$ acotado, entonces $\pi \in bd\,(\Pi_s)$ si y sólo si se cumple alguna de las siguientes condiciones:

$0_{n+1} \in ext\,(H)$ y $0_n \in bd\,(Z^-)\,;$

$0_{n+1} \in bd\,(H) \cap bd\,(C)\,;$

$0_{n+1} \in bd\,(H)$ y $0_n \in bd\,(Z^+)\,.$

**Distancia al mal planteamiento**

Sea $\pi \in \Pi \backslash \Pi_\infty$. Supongamos que se tiene alguna de las siguientes condiciones:

$\pi \in cl\,(\Pi_s)\,;$

$d\,(0_{n+1}, bd\,(H)) \neq d\,(0_n, bd\,(Z^-))\,;$

# Caracterización del mal planteamiento y distancia al mismo

**Caracterización del mal planteamiento**

Sea $\pi \in \Pi$ con $\{b_t\, , \, t \in T\}$ acotado, entonces $\pi \in bd\,(\Pi_s)$ si y sólo si se cumple alguna de las siguientes condiciones:

$0_{n+1} \in ext\,(H)$ y $0_n \in bd\,(Z^-)\,;$

$0_{n+1} \in bd\,(H) \cap bd\,(C)\,;$

$0_{n+1} \in bd\,(H)$ y $0_n \in bd\,(Z^+)\,.$

**Distancia al mal planteamiento**

Sea $\pi \in \Pi \backslash \Pi_\infty$. Supongamos que se tiene alguna de las siguientes condiciones:

$\pi \in cl\,(\Pi_s)\,;$

$d\,(0_{n+1}, bd\,(H)) \neq d\,(0_n, bd\,(Z^-))\,;$

$d\,(0_{n+1}, bd\,(H)) = d\,(0_n, bd\,(Z^-)) \geq \|c\|\,;$

**Caracterización del mal planteamiento**

Sea $\pi \in \Pi$ con $\{b_t\,,\, t \in T\}$ acotado, entonces $\pi \in bd\,(\Pi_s)$ si y sólo si se cumple alguna de las siguientes condiciones:

$0_{n+1} \in ext\,(H)$ y $0_n \in bd\,(Z^-)\,;$

$0_{n+1} \in bd\,(H) \cap bd\,(C)\,;$

$0_{n+1} \in bd\,(H)$ y $0_n \in bd\,(Z^+)\,.$

**Distancia al mal planteamiento**

Sea $\pi \in \Pi \backslash \Pi_\infty$. Supongamos que se tiene alguna de las siguientes condiciones:

$\pi \in cl\,(\Pi_s)\,;$

$d\,(0_{n+1}, bd\,(H)) \neq d\,(0_n, bd\,(Z^-))\,;$

$d\,(0_{n+1}, bd\,(H)) = d\,(0_n, bd\,(Z^-)) \geq \|c\|\,;$

entonces

$$\delta\,(\pi, bd\,(\Pi_s)) = \min\left\{d\,(0_{n+1}, bd\,(H))\,, d\left(0_n, bd\left(Z^-\right)\right)\right\}.$$

# Distancia al mal planteamiento: Ejemplo

*Consideremos el problema en* $\mathbb{R}^2$

$$\begin{array}{lll} \pi : \text{Inf} & \frac{1}{2}x_2 \\ \quad\;\; \text{s.a} & -x_1 + x_2 \geq 0 \\ & x_1 + x_2 \geq 0 \end{array}$$

# Distancia al mal planteamiento: Ejemplo

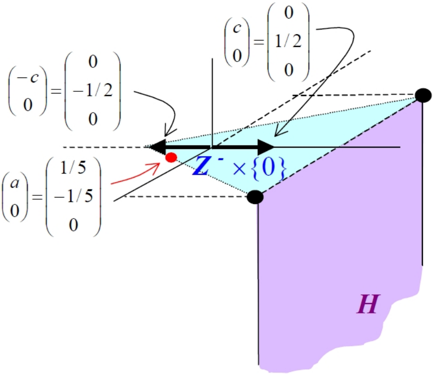
*Consideremos el problema en* $\mathbb{R}^2$

$$\begin{array}{lll} \pi : \text{Inf} & \frac{1}{2}x_2 \\ & \text{s.a} & -x_1 + x_2 \geq 0 \\ & & x_1 + x_2 \geq 0 \end{array}$$

*Tenemos que*

$$H = conv\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} + \mathbb{R}_+ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$Z^- = conv\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \end{pmatrix} \right\}$$



# Distancia al mal planteamiento: Ejemplo

*Consideremos el problema en* $\mathbb{R}^2$

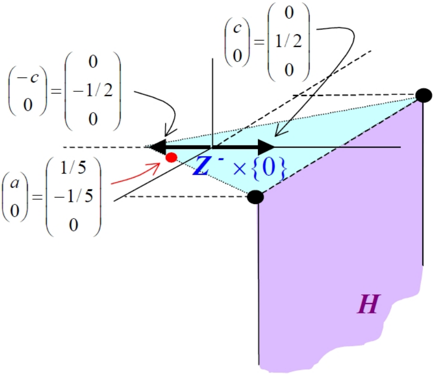
$$\begin{array}{lll} \pi : \text{Inf} & \frac{1}{2}x_2 \\ \quad\; \text{s.a} & -x_1 + x_2 \geq 0 \\ & x_1 + x_2 \geq 0 \end{array}$$

*Tenemos que*

$$H = conv\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} + \mathbb{R}_+ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$Z^- = conv\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \end{pmatrix}\right\}$$

$$0_3 \in ext\,(H) \Rightarrow \pi \in int\,(\Pi_c).$$



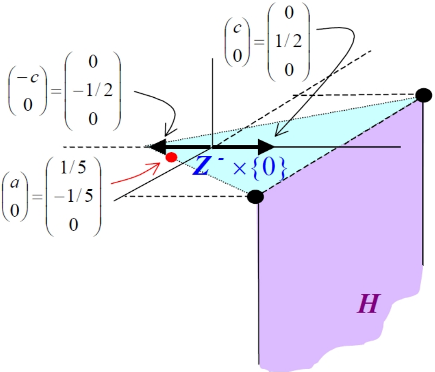
*Consideremos el problema en* $\mathbb{R}^2$

$$\begin{array}{lll} \pi : \text{Inf} & \frac{1}{2}x_2 \\ \quad \text{s.a} & -x_1 + x_2 \geq 0 \\ & x_1 + x_2 \geq 0 \end{array}$$

*Tenemos que*

$$H = conv\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} + \mathbb{R}_+ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$Z^- = conv\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \end{pmatrix} \right\}$$




$0_3 \in ext\,(H) \Rightarrow \pi \in int\,(\Pi_c)$. *Además* $0_2 \in int\,(Z^-)$ *, luego* $\pi \in int\,(\Pi_s)$ .

# Distancia al mal planteamiento: Ejemplo

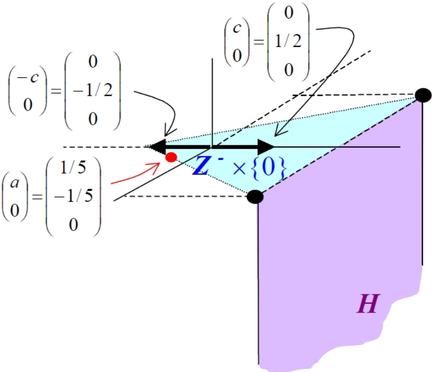
*Consideremos el problema en* $\mathbb{R}^2$

$$\pi : \text{Inf} \quad \tfrac{1}{2}x_2$$
$$\text{s.a} \quad -x_1 + x_2 \geq 0$$
$$x_1 + x_2 \geq 0$$

*Tenemos que*

$$H = conv\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} + \mathbb{R}_+ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$Z^- = conv\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \end{pmatrix}\right\}$$




$0_3 \in ext\,(H) \Rightarrow \pi \in int\,(\Pi_c)$. *Además* $0_2 \in int\,(Z^-)$, *luego* $\pi \in int\,(\Pi_s)$.

$$\tfrac{1}{5} = d_\infty\left(0_2, bd\left(Z^-\right)\right) < d_\infty\left(0_3, bd\,(H)\right) = 1$$

# Distancia al mal planteamiento: Ejemplo

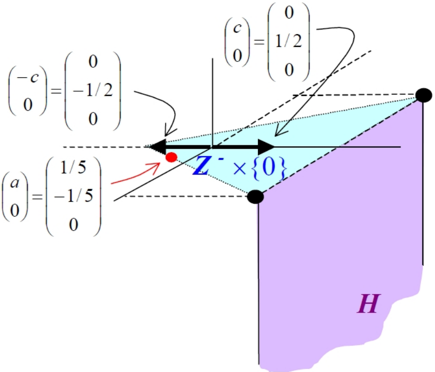
*Consideremos el problema en* $\mathbb{R}^2$

$$\pi : \text{Inf} \quad \tfrac{1}{2}x_2$$
$$\text{s.a} \quad -x_1 + x_2 \geq 0$$
$$x_1 + x_2 \geq 0$$

*Tenemos que*

$$H = conv\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} + \mathbb{R}_+ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$Z^- = conv\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \end{pmatrix}\right\}$$




$0_3 \in ext\,(H) \Rightarrow \pi \in int\,(\Pi_c)$. *Además* $0_2 \in int\,(Z^-)$ *, luego* $\pi \in int\,(\Pi_s)$ .

$$\tfrac{1}{5} = d_\infty\left(0_2, bd\left(Z^-\right)\right) < d_\infty\left(0_3, bd\left(H\right)\right) = 1$$

$$\delta\left(\pi, bd\left(\Pi_s\right)\right) = d\left(0_2, bd\left(Z^-\right)\right) = \tfrac{1}{5}.$$

# Algunas referencias bibliográficas

# Algunas referencias bibliográficas


- Goberna & López (1998). *Linear Semi-Infinite Optimization*. Wiley.

# Algunas referencias bibliográficas

• Goberna & López (1998). *Linear Semi-Infinite Optimization*. Wiley.

**Sistemas lineales semi-infinitos**

# Algunas referencias bibliográficas


• Goberna & López (1998). *Linear Semi-Infinite Optimization*. Wiley.

**Sistemas lineales semi-infinitos**

• Cánovas, López, Parra, & Toledo (2005). Distance to ill-posedness and the consistency value of linear semi-infinite inequality systems. *Math. Program. A*. **103(1)**, 95-126.

# Algunas referencias bibliográficas

• Goberna & López (1998). *Linear Semi-Infinite Optimization*. Wiley.

**Sistemas lineales semi-infinitos**

• Cánovas, López, Parra, & Toledo (2005). Distance to ill-posedness and the consistency value of linear semi-infinite inequality systems. *Math. Program. A*. **103(1)**, 95-126.

**Sistemas convexos semi-infinitos**

# Algunas referencias bibliográficas

• Goberna & López (1998). *Linear Semi-Infinite Optimization*. Wiley.

**Sistemas lineales semi-infinitos**

• Cánovas, López, Parra, & Toledo (2005). Distance to ill-posedness and the consistency value of linear semi-infinite inequality systems. *Math. Program. A.* **103(1)**, 95-126.

**Sistemas convexos semi-infinitos**

• Dinh, Goberna & López (2006). From linear to convex systems: Consistency, Farkas's Lemma and applications. *J Convex Anal* **13**, 113-133.

# Algunas referencias bibliográficas


- Goberna & López (1998). *Linear Semi-Infinite Optimization*. Wiley.

**Sistemas lineales semi-infinitos**

- Cánovas, López, Parra, & Toledo (2005). Distance to ill-posedness and the consistency value of linear semi-infinite inequality systems. *Math. Program. A.* **103(1)**, 95-126.

**Sistemas convexos semi-infinitos**

- Dinh, Goberna & López (2006). From linear to convex systems: Consistency, Farkas's Lemma and applications. *J Convex Anal* **13**, 113-133.
- Cánovas, Parra, & Toledo (2010). Distance to ill-posedness for convex semi-infinite inequality systems under affine perturbations. Preprint.

# Algunas referencias bibliográficas


• Goberna & López (1998). *Linear Semi-Infinite Optimization*. Wiley.

**Sistemas lineales semi-infinitos**

• Cánovas, López, Parra, & Toledo (2005). Distance to ill-posedness and the consistency value of linear semi-infinite inequality systems. *Math. Program. A.* **103(1)**, 95-126.

**Sistemas convexos semi-infinitos**

• Dinh, Goberna & López (2006). From linear to convex systems: Consistency, Farkas's Lemma and applications. *J Convex Anal* **13**, 113-133.

• Cánovas, Parra, & Toledo (2010). Distance to ill-posedness for convex semi-infinite inequality systems under affine perturbations. Preprint.

**Problemas de optimización lineal semi-infinitos**

# Algunas referencias bibliográficas


• Goberna & López (1998). *Linear Semi-Infinite Optimization*. Wiley.

**Sistemas lineales semi-infinitos**

• Cánovas, López, Parra, & Toledo (2005). Distance to ill-posedness and the consistency value of linear semi-infinite inequality systems. *Math. Program. A*. **103(1)**, 95-126.

**Sistemas convexos semi-infinitos**

• Dinh, Goberna & López (2006). From linear to convex systems: Consistency, Farkas's Lemma and applications. *J Convex Anal* **13**, 113-133.

• Cánovas, Parra, & Toledo (2010). Distance to ill-posedness for convex semi-infinite inequality systems under affine perturbations. Preprint.

**Problemas de optimización lineal semi-infinitos**

• Cánovas, López, Parra, & Toledo (2006). Ill-posedness with respect to the solvability in linear optimization. *Linear Algebra Appl.* **416**. 520-540.

# Algunas referencias bibliográficas


• Goberna & López (1998). *Linear Semi-Infinite Optimization*. Wiley.

**Sistemas lineales semi-infinitos**

• Cánovas, López, Parra, & Toledo (2005). Distance to ill-posedness and the consistency value of linear semi-infinite inequality systems. *Math. Program. A*. **103(1)**, 95-126.

**Sistemas convexos semi-infinitos**

• Dinh, Goberna & López (2006). From linear to convex systems: Consistency, Farkas's Lemma and applications. *J Convex Anal* **13**, 113-133.

• Cánovas, Parra, & Toledo (2010). Distance to ill-posedness for convex semi-infinite inequality systems under affine perturbations. Preprint.

**Problemas de optimización lineal semi-infinitos**

• Cánovas, López, Parra, & Toledo (2006). Ill-posedness with respect to the solvability in linear optimization. *Linear Algebra Appl*. **416**. 520-540.

• Cánovas, López, Parra, & Toledo (2006). Distance to solvability/ unsolvability in linear optimization. *SIAM J. Optim.* **16**, 629-649.

# Unas palabras para Marco

Es difícil expresar en pocas palabras, la

**GRATITUD, APRECIO y ADMIRACIÓN**

que tengo por Marco A. López Cerdá.
Ha sido y es un honor y un privilegio haberlo tenido como Director, como Colega y como Amigo. Es increible todo lo que uno puede llegar a aprender al lado de un verdadero maestro:

**CONOCIMIENTOS, RIGUROSIDAD, DEDICACIÓN, DISCIPLINA, ENTUSIASMO, VALORES**

entre muchas otras cosas, pero más que lo que uno aprende es lo que uno llega a ser y a sentir.

*Sin él no sería lo que soy ni estaría donde estoy.*

**GRACIAS POR TODO**