Análisis de estabilidad en programación semi-infinita

Parte II: Análisis de las multifunciones conjunto factible y conjunto óptimo

María Josefa Cánovas y Juan Parra

Centro de Investigación Operativa, Universidad Miguel Hernández de Elche

1. Introducción

1.1. Modelos de PSIL y PSIC

Consideramos problemas de optimización lineal del tipo:

$$\begin{array}{ll} \text{Inf} & c'x \\ \text{s. a} & a_t'x \geq b_t, \;\; t \in T, \end{array}$$

1. Introducción

1.1. Modelos de PSIL y PSIC

Consideramos problemas de optimización lineal del tipo:

$$\begin{array}{ll} \text{Inf} & c'x \\ \text{s. a} & a_t'x \geq b_t, \ \ t \in T, \end{array}$$

y de optimización convexa del tipo

$$\begin{array}{ll} \text{Inf} & f(x) \\ \text{s. a} & g_t(x) \leq 0, \ \ t \in T, \end{array}$$

1. Introducción

1.1. Modelos de PSIL y PSIC

Consideramos problemas de optimización lineal del tipo:

$$\begin{array}{ll} \text{Inf} & c'x \\ \text{s. a} & a_t'x \geq b_t, \ \ t \in T, \end{array}$$

y de optimización convexa del tipo

$$\begin{array}{ll} \text{Inf} & f(x) \\ \text{s. a} & g_t(x) \leq 0, \ \ t \in T, \end{array}$$

(en el caso lineal $\qquad g_t(x) = b_t - a_t'x$).

1. Introducción

1.1. Modelos de PSIL y PSIC

Consideramos problemas de optimización lineal del tipo:

$$\begin{array}{ll} \text{Inf} & c'x \\ \text{s. a} & a_t'x \geq b_t, \;\; t \in T, \end{array}$$

y de optimización convexa del tipo

$$\begin{array}{ll} \text{Inf} & f(x) \\ \text{s. a} & g_t(x) \leq 0, \;\; t \in T, \end{array}$$

(en el caso lineal $\qquad g_t(x) = b_t - a_t'x$).

- $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector (columna) de variables de decisión;

1. Introducción

1.1. Modelos de PSIL y PSIC

Consideramos problemas de optimización lineal del tipo:

$$\begin{array}{ll} \text{Inf} & c'x \\ \text{s. a} & a_t'x \geq b_t, \ \ t \in T, \end{array}$$

y de optimización convexa del tipo

$$\begin{array}{ll} \text{Inf} & f(x) \\ \text{s. a} & g_t(x) \leq 0, \ \ t \in T, \end{array}$$

(en el caso lineal $\qquad g_t(x) = b_t - a_t'x$).

- $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector (columna) de variables de decisión;
- c' es el traspuesto de $c \in \mathbb{R}^n$; $c'x$ producto escalar usual;

1. Introducción

1.1. Modelos de PSIL y PSIC

Consideramos problemas de optimización lineal del tipo:

$$\begin{array}{ll} \text{Inf} & c'x \\ \text{s. a} & a_t'x \geq b_t, \;\; t \in T, \end{array}$$

y de optimización convexa del tipo

$$\begin{array}{ll} \text{Inf} & f(x) \\ \text{s. a} & g_t(x) \leq 0, \;\; t \in T, \end{array}$$

(en el caso lineal $\quad g_t(x) = b_t - a_t'x$).

- $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector (columna) de variables de decisión;
- c' es el traspuesto de $c \in \mathbb{R}^n$; $c'x$ producto escalar usual;
- $a_t \in \mathbb{R}^n$, $b_t \in \mathbb{R}$, $t \in T$ (conjunto de índices)

1. Introducción

1.1. Modelos de PSIL y PSIC

Consideramos problemas de optimización lineal del tipo:

$$\begin{array}{ll} \text{Inf} & c'x \\ \text{s. a} & a_t'x \geq b_t, \quad t \in T, \end{array}$$

y de optimización convexa del tipo

$$\begin{array}{ll} \text{Inf} & f(x) \\ \text{s. a} & g_t(x) \leq 0, \quad t \in T, \end{array}$$

(en el caso lineal $\quad g_t(x) = b_t - a_t'x$).

- $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector (columna) de variables de decisión;
- c' es el traspuesto de $c \in \mathbb{R}^n$; $c'x$ producto escalar usual;
- $a_t \in \mathbb{R}^n$, $b_t \in \mathbb{R}$, $t \in T$ (conjunto de índices)
- f, $g_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $t \in T$, son funciones convexas .

- Si T es finito: problema de Programación Lineal/Convexa (PL/PC)

- Si T es finito: problema de Programación Lineal/Convexa (PL/PC)
- Si T es infinito: problema de Programación Semi-Infinita Lineal/Convexa (PSIL/PSIC)

- Si T es finito: problema de Programación Lineal/Convexa (PL/PC)
- Si T es infinito: problema de Programación Semi-Infinita Lineal/Convexa (PSIL/PSIC)

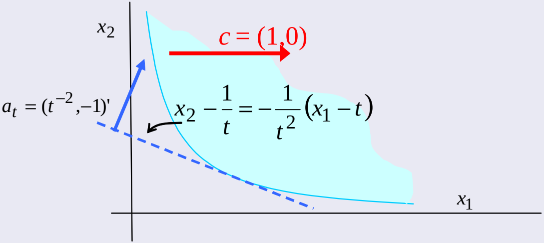
Ejemplo (un problema de PSIL en $\mathbb{R}^2$)

$$\pi: \quad Inf \quad x_1$$
$$s.a \quad t^{-2}x_1 + x_2 \geq 2t^{-1}, \ \ t \in T :=]0, +\infty[.$$

- Si T es finito: problema de Programación Lineal/Convexa (PL/PC)
- Si T es infinito: problema de Programación Semi-Infinita Lineal/Convexa (PSIL/PSIC)

Ejemplo (un problema de PSIL en $\mathbb{R}^2$)

$$\pi: \quad Inf \quad x_1$$
$$s.a \quad t^{-2}x_1 + x_2 \geq 2t^{-1}, \quad t \in T :=]0, +\infty[.$$



Espacios paramétricos

Caso continuo: T compacto Hausdorff,

$$P(c,b): \quad \begin{array}{ll} \text{Inf} & f(x) + \langle c, x \rangle \\ \text{s. a} & g_t(x) \leq b_t, \ \ t \in T, \end{array}$$

Espacios paramétricos

Caso continuo: T compacto Hausdorff,

$$P(c,b): \quad \begin{array}{ll} \text{Inf} & f(x) + \langle c, x \rangle \\ \text{s. a} & g_t(x) \leq b_t, \quad t \in T, \end{array}$$

- $(t,x) \mapsto g_t(x)$ continua en $T \times \mathbb{R}^n$.

Espacios paramétricos

Caso continuo: T compacto Hausdorff,

$$P(c,b): \quad \begin{array}{ll} \text{Inf} & f(x) + \langle c, x \rangle \\ \text{s. a} & g_t(x) \leq b_t, \;\; t \in T, \end{array}$$

- $(t,x) \mapsto g_t(x)$ continua en $T \times \mathbb{R}^n$.
- Parámetro: $(c,b) \in \mathbb{R}^n \times C(T,\mathbb{R})$,

$$\|(c,b)\| = \max\{\|c\|, \|b\|\}, \qquad \|b\| = \max_{t \in T} |b_t|.$$

Espacios paramétricos

Caso continuo: T compacto Hausdorff,

$$\begin{array}{lll} P(c,b): & \text{Inf} & f(x) + \langle c, x \rangle \\ & \text{s. a} & g_t(x) \leq b_t, \;\; t \in T, \end{array}$$

- $(t,x) \mapsto g_t(x)$ continua en $T \times \mathbb{R}^n$.
- Parámetro: $(c,b) \in \mathbb{R}^n \times C(T,\mathbb{R})$,

$$\|(c,b)\| = \max\{\|c\|, \|b\|\}, \qquad \|b\| = \max_{t \in T} |b_t|.$$

- Multifunción conjunto factible/óptimo, $\mathcal{F} : C(T,\mathbb{R}) \rightrightarrows \mathbb{R}^n$, $\mathcal{F}^* : \mathbb{R}^n \times C(T,\mathbb{R}) \rightrightarrows \mathbb{R}^n$,

$$\mathcal{F}(b) := \{x \in \mathbb{R}^n : g_t(x) \leq b_t, \; \forall t \in T\}.$$

$$\mathcal{F}^*(c,b) := \arg\min\{f(x) + \langle c, x \rangle, \; x \in \mathcal{F}(b)\}.$$

Caso lineal general: T arbitrario,

Caso lineal general: T arbitrario,

- $t \mapsto (a_t, b_t)$ función arbitraria

Caso lineal general: T arbitrario,

- $t \mapsto (a_t, b_t)$ función arbitraria
- Parámetro: $\pi = (c, \sigma) \in \mathbb{R}^n \times \Theta$,

$$\sigma = \left\{ a_t' x \geq b_t, \ \ t \in T \right\} \equiv (a, b) \in \left(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \right)^T.$$

Caso lineal general: T arbitrario,

- $t \mapsto (a_t, b_t)$ función arbitraria
- Parámetro: $\pi = (c, \sigma) \in \mathbb{R}^n \times \Theta$,

$$\sigma = \left\{ a_t' x \geq b_t, \;\; t \in T \right\} \equiv (a, b) \in \left(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \right)^T .$$

- Distancia extendida en el espacio paramétrico

$$\delta\left(\pi_1, \pi_2\right) = \max\left\{ \left\| c^1 - c^2 \right\|, \sup_{t \in T} \left\| \begin{pmatrix} a_t^1 \\ b_t^1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_t^2 \\ b_t^2 \end{pmatrix} \right\| \right\} \in [0, +\infty],$$

Caso lineal general: T arbitrario,

- $t \mapsto (a_t, b_t)$ función arbitraria
- Parámetro: $\pi = (c, \sigma) \in \mathbb{R}^n \times \Theta$,

$$\sigma = \{a_t' x \geq b_t, \ \ t \in T\} \equiv (a, b) \in (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})^T .$$

- Distancia extendida en el espacio paramétrico

$$\delta(\pi_1, \pi_2) = \max\left\{ \left\| c^1 - c^2 \right\|, \sup_{t \in T} \left\| \begin{pmatrix} a_t^1 \\ b_t^1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_t^2 \\ b_t^2 \end{pmatrix} \right\| \right\} \in [0, +\infty],$$

- Multifunción conjunto factible $\mathcal{F} : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})^T \rightrightarrows \mathbb{R}^n$

$$\mathcal{F}(\sigma) := \{x \in \mathbb{R}^n : a_t' x \geq b_t, \ \forall t \in T\} .$$

1.2. Objetivos de la charla

1.2. Objetivos de la charla

- Definir propiedades de continuidad y de tipo Lipschitz de multifunciones

1.2. Objetivos de la charla

- Definir propiedades de continuidad y de tipo Lipschitz de multifunciones

- Analizar dichas propiedades en nuestros modelos de PSIL y PSIC

1.2. Objetivos de la charla

- Definir propiedades de continuidad y de tipo Lipschitz de multifunciones

- Analizar dichas propiedades en nuestros modelos de PSIL y PSIC

- Calcular o estimar módulos de Lipschitz

1.2. Objetivos de la charla

- Definir propiedades de continuidad y de tipo Lipschitz de multifunciones
- Analizar dichas propiedades en nuestros modelos de PSIL y PSIC
- Calcular o estimar módulos de Lipschitz
- Asomarnos a la estabilidad de $\mathcal{F}$ en Programación Infinita Lineal (PIL)

2. Pr. de cont./Lipschitz de multifunciones

Definición

X, Y espacios topológicos. $\mathcal{M} : X \rightrightarrows Y$ es (Berge-) semicontinua inferormente (lsc) en $\overline{x}$ si para cada abierto $V \subset Y$ verificando $\mathcal{M}(\overline{x}) \cap V \neq \emptyset$, existe un entorno de $\overline{x}$, U, tal que

$$\mathcal{M}(x) \cap V \neq \emptyset, \text{ para todo } x \in U.$$

2. Pr. de cont./Lipschitz de multifunciones

Definición

X, Y espacios topológicos. $\mathcal{M} : X \rightrightarrows Y$ es (Berge-) semicontinua inferormente (lsc) en $\overline{x}$ si para cada abierto $V \subset Y$ verificando $\mathcal{M}(\overline{x}) \cap V \neq \emptyset$, existe un entorno de $\overline{x}$, U, tal que

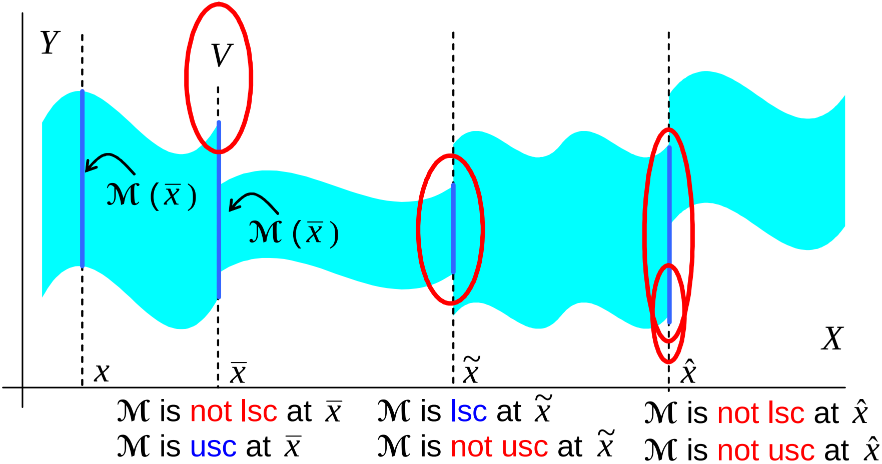
$$\mathcal{M}(x) \cap V \neq \emptyset, \text{ para todo } x \in U.$$

Definición

X, Y espacios topológicos. $\mathcal{M} : X \rightrightarrows Y$ es (Berge-) semicontinua superiormente (usc) en $\overline{x}$ si para cada abierto $V \subset Y$ verificando $\mathcal{M}(\overline{x}) \subset V$, existe un entorno de $\overline{x}$, U, tal que

$$\mathcal{M}(x) \subset V, \text{ para todo } x \in U.$$

Ilustración: (en azul el grafo de la multifunción $\mathcal{M}$, gph$\mathcal{M}$)



2.2. Propiedad de Aubin (Lipschitz-like)

Recordemos que $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, I intervalo, se dice Lipschitz continua en $\overline{x} \in I$ si $\exists U$ entorno de $\overline{x}$, $\exists \kappa \geq 0$, tales que

$$\left| f(x) - f(x') \right| \leq \kappa \left| x - x' \right| \quad \forall x, x' \in U.$$

2.2. Propiedad de Aubin (Lipschitz-like)

Recordemos que $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, I intervalo, se dice Lipschitz continua en $\overline{x} \in I$ si $\exists U$ entorno de $\overline{x}$, $\exists \kappa \geq 0$, tales que

$$\left| f(x) - f(x') \right| \leq \kappa \left| x - x' \right| \quad \forall x, x' \in U.$$

El ínfimo de tales κ (conforme U se contrae hacia $\overline{x}$) se llama módulo de Lipzchitz de f en $\overline{x}$, y se denota por $\operatorname{lip} f(\overline{x})$.

2.2. Propiedad de Aubin (Lipschitz-like)

Recordemos que $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, I intervalo, se dice Lipschitz continua en $\overline{x} \in I$ si $\exists U$ entorno de $\overline{x}$, $\exists \kappa \geq 0$, tales que

$$\left| f(x) - f(x') \right| \leq \kappa \left| x - x' \right| \quad \forall x, x' \in U.$$

El ínfimo de tales κ (conforme U se contrae hacia $\overline{x}$) se llama módulo de Lipzchitz de f en $\overline{x}$, y se denota por $\operatorname{lip} f(\overline{x})$.

Si f es de clase C^1 en $\overline{x}$, se tiene

$$\operatorname{lip} f(\overline{x}) = \left| f'(\overline{x}) \right|.$$

Definición

X, Y espacios métricos. $\mathcal{M} : X \rightrightarrows Y$ es Lipschitz-like (o Aubin continua) en $(\bar{x}, \bar{y}) \in \text{gph}\mathcal{M}$ si $\exists U$ entorno de $\bar{x}$, $\exists V$ entorno de $\bar{y}$, $\exists \kappa \geq 0$ tales que

$$d\left(y, \mathcal{M}\left(x\right)\right) \leq \kappa d\left(x, x'\right) \ \forall x, x' \in U, \ \forall y \in \mathcal{M}\left(x'\right) \cap V.$$

Definición

X, Y espacios métricos. $\mathcal{M} : X \rightrightarrows Y$ es Lipschitz-like (o Aubin continua) en $(\overline{x}, \overline{y}) \in \mathrm{gph}\mathcal{M}$ si $\exists U$ entorno de $\overline{x}$, $\exists V$ entorno de $\overline{y}$, $\exists \kappa \geq 0$ tales que

$$d\left(y, \mathcal{M}\left(x\right)\right) \leq \kappa d\left(x, x'\right) \ \forall x, x' \in U, \ \forall y \in \mathcal{M}\left(x'\right) \cap V.$$

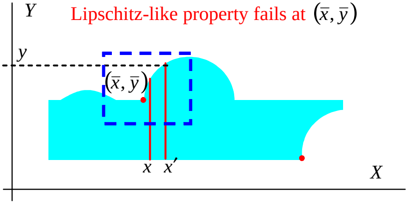
$\mathrm{lip}\, \mathcal{M}\left(\overline{x}, \overline{y}\right)$*, el módulo de Lipschitz de $\mathcal{M}$ en $\left(\overline{x}, \overline{y}\right)$, es el ínfimo de tales κ.*

Definición

X, Y espacios métricos. $\mathcal{M} : X \rightrightarrows Y$ es Lipschitz-like (o Aubin continua) en $(\overline{x}, \overline{y}) \in \operatorname{gph}\mathcal{M}$ si $\exists U$ entorno de $\overline{x}$, $\exists V$ entorno de $\overline{y}$, $\exists \kappa \geq 0$ tales que

$$d\left(y, \mathcal{M}\left(x\right)\right) \leq \kappa d\left(x, x'\right) \ \forall x, x' \in U, \ \forall y \in \mathcal{M}\left(x'\right) \cap V.$$

$\operatorname{lip} \mathcal{M}\left(\overline{x}, \overline{y}\right)$*, el módulo de Lipschitz de $\mathcal{M}$ en $\left(\overline{x}, \overline{y}\right)$, es el ínfimo de tales κ.*



2.3. Algunas referencias en PSIL/PSIC

	En $\mathbb{R}^n$	En esp. de Banach
lsc y/o usc de $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}^*$	Bro(84), Fis(83), GoLoTo (96,97) GoLo (98) CaLoPaTo (99) CaLoPa(02)	DiGoLo (09)
Lipschitz-like de $\mathcal{F}$	CaDoLoPa (05)[1] CaGoPa (09,10)	CaMoLoPa (09)[3]
Lipschitz-like de $\mathcal{F}^*$	CaKlaLoPa (07)[2] CaGoPa (08)	

[1] Math. Program 104B: 329-346, [2] SIOPT 18: 717-732, [3] SIOPT 20:1504-1526

3. Prop. de continuidad de $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}^*$ en PSIL

Basado en:

- M. A. Goberna, M. A. López and M.I. Todorov (1996), Stability theory for linear inequality systems, SIAM J. Matrix Anal. Appl., 17, 730-743.
- M. A. Goberna and M. A. López (1998), Linear Semi-Infinite Optimization, John Wiley & Sons, Chichester (UK).

Teorema (véase Teo. 3.1 [GoLoTo96], Teo.6.1 [GoLo98])

Dado $\sigma \in \Theta_c$ (σ consistente), son equivalentes:
(i) $\mathcal{F}$ *es lsc en* σ;
(ii) $\sigma \in int\left(\Theta_c\right)$;
(v) $0_{n+1} \notin \mathrm{cl}\,\mathrm{conv}\left\{\binom{a_t}{b_t},\ t \in T\right\}$;
(vi) σ *satisface la condición fuerte de Slater (SSC):*
$\exists \widehat{x} \in \mathbb{R}^n, \exists \rho > 0$ *tales que* $a_t'\widehat{x} \geq b_t + \rho \ \ \forall t \in T$;

Semicontinuidad superior de $\mathcal{F}$

- M. A. Goberna, M. A. López and M.I. Todorov (1997), Stability theory for linear inequality systems II: upper semicontinuity of the solution set mapping, SIAM J. Optim., 7, 1138-1151.
- M. J. Cánovas, M. A. López and J. Parra (2002), Upper semicontinuity of the feasible set mapping for linear inequality systems, Set-Valued Anal. 10, 361-378

Semicontinuidad inferior y superior de $\mathcal{F}^*$

- M. J. Cánovas, M. A. López, J. Parra and M. I. Todorov (1999), Stability and well-posedness in Linear Semi-Infinite Programming, SIAM J. Optim. 10, 82-98

$F^* := \mathcal{F}^*(\pi)$ no vacío		$\mathcal{F}$ lsc en π	$\mathcal{F}$ no lsc en π
F^* se reduce a un punto	$F = F^*$	I , II,	$\bar{\mathrm{I}}$, II
	$F \neq F^*$		$\bar{\mathrm{I}}$, $\overline{\mathrm{II}}$
F^* acotado, con más de un punto	$F = F^*$	$\bar{\mathrm{I}}$, II	$\bar{\mathrm{I}}$, II
	$F \neq F^*$		$\bar{\mathrm{I}}$, $\overline{\mathrm{II}}$
F^* es no acotado	$F = F^*$	$\bar{\mathrm{I}}$	$\bar{\mathrm{I}}$
	$F \neq F^*$		$\bar{\mathrm{I}}$, $\overline{\mathrm{II}}$

I: $\mathcal{F}^*$ es lsc en π; II: $\mathcal{F}^*$ es usc en π;; $\bar{\mathrm{I}}$: negación de I (etc.).

4. Prop. de Aubin en LSIP/CSIP continua

4.1. Propiedad de Aubin y regularidad métrica

- $\mathcal{M} : X \rightrightarrows Y$ Lipschitz-like en $(\overline{x}, \overline{y}) \in \mathrm{gph}\mathcal{M}$ si y sólo si $\mathcal{M}^{-1}$ es metricamente regular en $(\overline{x}, \overline{y})$: $\exists U$ entorno de $\overline{x}$, $\exists V$ entorno de $\overline{y}$, $\exists \kappa \geq 0$ tales que

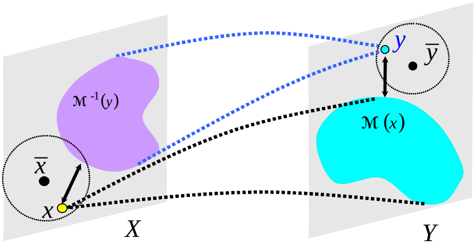
$$d(y, \mathcal{M}(x)) \leq \kappa d(x, \mathcal{M}^{-1}(y)) \quad \forall y \in V, \forall x \in U.$$

4. Prop. de Aubin en LSIP/CSIP continua

4.1. Propiedad de Aubin y regularidad métrica

- $\mathcal{M} : X \rightrightarrows Y$ Lipschitz-like en $(\overline{x}, \overline{y}) \in \mathrm{gph}\mathcal{M}$ si y sólo si $\mathcal{M}^{-1}$ es metricamente regular en $(\overline{x}, \overline{y})$: $\exists U$ entorno de $\overline{x}$, $\exists V$ entorno de $\overline{y}$, $\exists \kappa \geq 0$ tales que

$$d\left(y, \mathcal{M}\left(x\right)\right) \leq \kappa d(x, \mathcal{M}^{-1}\left(y\right)) \ \ \forall y \in V, \forall x \in U.$$



La regularidad métrica de $\mathcal{F}^{-1}$ en $(\overline{x}, \overline{p}) \in \mathrm{gph}\mathcal{F}^{-1}$ se lee:

$$d\left(x, \mathcal{F}\left(p\right)\right) \leq \kappa d(p, \mathcal{F}^{-1}\left(x\right)) \text{ siempre que } x \in U \text{ y } p \in V,$$

y el residuo $d\left(p, \mathcal{F}^{-1}\left(x\right)\right)$ es normalmente mucho más fácil de calcular o estimar que $d\left(x, \mathcal{F}\left(p\right)\right)$.

La regularidad métrica de $\mathcal{F}^{-1}$ en $(\overline{x}, \overline{p}) \in \mathrm{gph}\mathcal{F}^{-1}$ se lee:

$$d\left(x, \mathcal{F}\left(p\right)\right) \leq \kappa d(p, \mathcal{F}^{-1}\left(x\right)) \text{ siempre que } x \in U \text{ y } p \in V,$$

y el residuo $d\left(p, \mathcal{F}^{-1}\left(x\right)\right)$ es normalmente mucho más fácil de calcular o estimar que $d\left(x, \mathcal{F}\left(p\right)\right)$.

- Además, si $\mathrm{reg}\, \mathcal{F}^{-1}\left(\overline{x} \mid \overline{p}\right)$ denota el módulo de regularidad de $\mathcal{F}^{-1}$ en $(\overline{x}, \overline{p})$, La regularidad métrica de $\mathcal{F}^{-1}$ en $(\overline{x},\overline{p}) \in \text{gph}\mathcal{F}^{-1}$ se lee:

$$d\left(x,\mathcal{F}\left(p\right)\right) \leq \kappa d(p,\mathcal{F}^{-1}\left(x\right)) \text{ siempre que } x \in U \text{ y } p \in V,$$

y el residuo $d\left(p,\mathcal{F}^{-1}\left(x\right)\right)$ es normalmente mucho más fácil de calcular o estimar que $d\left(x,\mathcal{F}\left(p\right)\right)$.

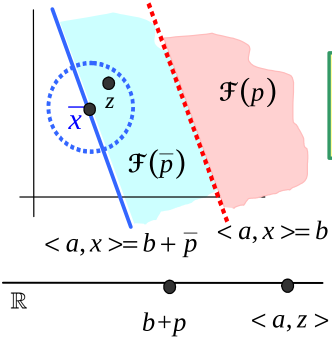
- Además, si $\operatorname{reg}\mathcal{F}^{-1}\left(\overline{x}\mid\overline{p}\right)$ denota el módulo de regularidad de $\mathcal{F}^{-1}$ en $(\overline{x},\overline{p})$,

$$\operatorname{lip}\mathcal{F}\left(\overline{p},\overline{x}\right) = \operatorname{reg}\mathcal{F}^{-1}\left(\overline{x}\mid\overline{p}\right) = \limsup_{(x,p)\to(\overline{x},\overline{p})} \frac{d\left(x,\mathcal{F}\left(p\right)\right)}{d\left(p,\mathcal{F}^{-1}\left(x\right)\right)}$$

(bajo el convenio $\frac{0}{0}=0$)

Ejemplo (el caso de una sola desigualdad en $\mathbb{R}^n$)

Considérese $\mathcal{F}(p) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a, x\rangle \leq b + p\}$ *, con* $a \neq 0_n$.



$$d\,(z, \mathfrak{F}\,(p)) = \frac{[< a, z > - b - p\,]_+}{\|a\|_*}$$

$$d\left(p, \mathfrak{F}^{-1}(z)\right) = [< a, z > - b - p\,]_+$$

4.2. Módulo de Lipschitz de $\mathcal{F}$ en LSIP

Basado en: M. J. Cánovas, A. L. Dontchev, M. A. López and J. Parra (2005), Metric regularity of semi-infinite constraint systems Math. Programming 104B, 329-346.

(Caso continuo)

Teorema (see CaDoLoPa05, Cor. 3.2)

$\mathcal{F}$ es Lipschitz-like at $(\overline{b},\overline{x}) \in \operatorname{gph}\mathcal{F}$ sii se tiene SSC en $\overline{b}$, y
(i) Si $\overline{x}$ es un punto de Slater para $\overline{b}$, entonces $\operatorname{lip}\mathcal{F}(\overline{b},\overline{x}) = 0$;
(ii) Si $\overline{x}$ no es un punto de Slater para $\overline{b}$, entonces

$$\begin{aligned}\operatorname{lip}\mathcal{F}(\overline{b},\overline{x}) &= \max\left\{\|u\|_*^{-1} \mid u \in \operatorname{conv}\left\{a_t : t \in T_{\overline{b}}(\overline{x})\right\}\right\} \\ &= d_*\left(0_n, \operatorname{conv}\left\{a_t : t \in T_{\overline{b}}(\overline{x})\right\}\right)^{-1},\end{aligned}$$

donde $T_{\overline{b}}(\overline{x}) := \{t \in T : a_t'\overline{x} = b_t\}$.

4.3. Propiedad de Aubin de $\mathcal{F}^*$ en LSIP

Basado en:

- M. J. Cánovas, D. Klatte, M. A. López and J. Parra (2007), Metric regularity in convex semi-infinite optimization under canonical perturbations, SIAM J. Optim. 18, 717-732.

4.3. Propiedad de Aubin de $\mathcal{F}^*$ en LSIP

Basado en:

- M. J. Cánovas, D. Klatte, M. A. López and J. Parra (2007), Metric regularity in convex semi-infinite optimization under canonical perturbations, SIAM J. Optim. 18, 717-732.

Algunos antecedentes:

- D. Klatte and B. Kummer (2005), Strong Lipschitz stability of stationary solutions for nonlinear programs and variational inequalities, SIAM J. Optim. 16, 96-119.
- G. Nürnberger (1984), Unicity in semi-infinite optimization, in Parametric Optimization and Approximation. B. Brosowski, F. Deutsch, eds., Birkhäuser, Basel, 231-247.

Una condición de tipo Karush-Kuhn-Tucker (KKT)

- Conjunto de índices activos: $T_b(x) := \{t \in T \mid \langle a_t, x \rangle = b_t\}$

Una condición de tipo Karush-Kuhn-Tucker (KKT)

- Conjunto de índices activos: $T_b(x) := \{t \in T \mid \langle a_t, x\rangle = b_t\}$
- $A_b(x) := \operatorname{cone}(\{a_t,\ t \in T_b(x)\})$ (envoltura convexa cónica)

Una condición de tipo Karush-Kuhn-Tucker (KKT)

- Conjunto de índices activos: $T_b(x) := \{t \in T \mid \langle a_t, x \rangle = b_t\}$
- $A_b(x) := \text{cone}\left(\{a_t,\ t \in T_b(x)\}\right)$ (envoltura convexa cónica)
- Condición de optimalidad de KKT (véase [GoLo98]):

$$x \in \mathcal{F}(b) \text{ and } c \in A_b(x) \;\; \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \Leftarrow \\ SSC \end{array} \;\; x \in \mathcal{F}^*(c, b)$$

Una condición de tipo Karush-Kuhn-Tucker (KKT)

- Conjunto de índices activos: $T_b(x) := \{t \in T \mid \langle a_t, x\rangle = b_t\}$
- $A_b(x) := \text{cone}(\{a_t,\ t \in T_b(x)\})$ (envoltura convexa cónica)
- Condición de optimalidad de KKT (véase [GoLo98]):

$$x \in \mathcal{F}(b) \text{ and } c \in A_b(x) \quad \underset{SSC}{\overset{\Rightarrow}{\Leftarrow}} \quad x \in \mathcal{F}^*(c,b)$$

Definición

La condición de Nürnberger (NC) se verifica en $(\overline{\pi}, \overline{x}) \in \text{gph}(\mathcal{F}^*)$ si

$$SSC \textit{ se tiene en } \overline{b} \textit{ y no existe } D \subset T_{\overline{b}}(\overline{x})$$
$$\textit{con } |D| < n \textit{ tal que } \overline{c} \in \textit{cone}(\{a_t,\ t \in D\}).$$

Teorema ([CKLP07, Teo. 16])

(Caso continuo) Sea $((\bar{c}, \bar{b}), \bar{x}) \in \mathrm{gph}(\mathcal{F}^*)$ *. Son equivalentes:*

(i) $\mathcal{F}^*$ *es Lipschitz-like en* $((\bar{c}, \bar{b}), \bar{x})$*;*

Teorema ([CKLP07, Teo. 16])

(Caso continuo) Sea $((\overline{c},\overline{b}),\overline{x}) \in \mathrm{gph}(\mathcal{F}^*)$. Son equivalentes:

(i) $\mathcal{F}^*$ es Lipschitz-like en $((\overline{c},\overline{b}),\overline{x})$;

(ii) $\mathcal{F}^*$ es univaluada (una función) y Lipschitz continua en algún entorno de $(\overline{c},\overline{b})$; (estabilidad fuerte de Lipschitz)

Teorema ([CKLP07, Teo. 16])

(Caso continuo) Sea $((\bar{c}, \bar{b}), \bar{x}) \in \mathrm{gph}(\mathcal{F}^*)$ *. Son equivalentes:*

(i) $\mathcal{F}^*$ *es Lipschitz-like en* $((\bar{c}, \bar{b}), \bar{x})$*;*

(ii) $\mathcal{F}^*$ *es univaluada (una función) y Lipschitz continua en algún entorno de* $(\bar{c}, \bar{b})$*; (estabilidad fuerte de Lipschitz)*

(iii) $\mathcal{F}^*$ *es univaluada y continua ; (estabilidad de tipo Kojima, véase Kojima (1980))*

Teorema ([CKLP07, Teo. 16])

(Caso continuo) Sea $((\bar{c}, \bar{b}), \bar{x}) \in \mathrm{gph}(\mathcal{F}^*)$ *. Son equivalentes:*

(i) $\mathcal{F}^*$ *es Lipschitz-like en* $((\bar{c}, \bar{b}), \bar{x})$;

(ii) $\mathcal{F}^*$ *es univaluada (una función) y Lipschitz continua en algún entorno de* $(\bar{c}, \bar{b})$; *(estabilidad fuerte de Lipschitz)*

(iii) $\mathcal{F}^*$ *es univaluada y continua ; (estabilidad de tipo Kojima, véase Kojima (1980))*

(iv) $\mathcal{F}^*$ *es univaluada en algún entorno de* $(\bar{c}, \bar{b})$;

Teorema ([CKLP07, Teo. 16])

(Caso continuo) Sea $((\bar{c},\bar{b}),\bar{x}) \in \mathrm{gph}(\mathcal{F}^*)$ *. Son equivalentes:*

(i) $\mathcal{F}^*$ *es Lipschitz-like en* $((\bar{c},\bar{b}),\bar{x})$*;*

(ii) $\mathcal{F}^*$ *es univaluada (una función) y Lipschitz continua en algún entorno de* $(\bar{c},\bar{b})$*; (estabilidad fuerte de Lipschitz)*

(iii) $\mathcal{F}^*$ *es univaluada y continua ; (estabilidad de tipo Kojima, véase Kojima (1980))*

(iv) $\mathcal{F}^*$ *es univaluada en algún entorno de* $(\bar{c},\bar{b})$*;*

(v) NC se verifica en $((\bar{c},\bar{b}),\bar{x})$.

Propiedad de Aubin de $\mathcal{F}^*$ en CSIP

$$
\begin{array}{ccc}
\begin{array}{c}\text{ENC en} \\ \left(\left(\bar{c},\bar{b}\right),\bar{x}\right)\end{array} & \begin{array}{c}\Rightarrow \\ \not\Leftarrow\end{array} & \left(\bar{c},\bar{b}\right) \in \operatorname{int}\left\{ \begin{array}{c} \left(c,b\right) \mid P\left(c,b\right) \text{ tiene} \\ \text{mínimo fuertemente único} \end{array} \right\} \\
\Downarrow \quad \not\Uparrow & & \\
\left\{ \mathcal{F}^* \text{ es Lips.} \right\} & \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{c} \mathcal{F}^* \text{ es univaluada y Lipschitz} \\ \text{en un entorno de } \left(\bar{c},\bar{b}\right) \\ \text{(fuertemente Lipschitz estable)} \end{array} \right\} \\
& & \Downarrow \quad \not\Uparrow \\
& & \left\{ \begin{array}{c} \mathcal{F}^* \text{ es univaluada y continua} \\ \text{en un entorno de } \left(\bar{c},\bar{b}\right) \\ \text{(estabilidad tipo Kojima)} \end{array} \right\}
\end{array}
$$

Todas estas condiciones son equivalentes en el caso lineal

5. Comentarios sobre Prog. Infinita Lineal

Basado en:

- M. J. Cánovas, B. Mordukhovich, M. A. López, and J. Parra (2009), Variational Analysis in semi-infinite and infinite programming, I: Stability of linear inequality systems of feasible solutions, SIAM J. Optim. 20, pp. 1504-1526.

5. Comentarios sobre Prog. Infinita Lineal

Basado en:

- M. J. Cánovas, B. Mordukhovich, M. A. López, and J. Parra (2009), Variational Analysis in semi-infinite and infinite programming, I: Stability of linear inequality systems of feasible solutions, SIAM J. Optim. 20, pp. 1504-1526.

Algunos antecedentes:

- B.S. Mordukhovich (2006), Variational Analysis and Generalized Differentiation I, Springer-Verlag, Berlin.

Caso general: X Banach arbitrario, T arbitrario
Sistema infinito parametrizado de desigualdades lineales

$$\sigma(p) := \{\langle a_t^*, x\rangle \leq b_t + p_t,\ t \in T\},$$

Caso general: X Banach arbitrario, T arbitrario
Sistema infinito parametrizado de desigualdades lineales

$$\sigma(p) := \{\langle a_t^*, x\rangle \leq b_t + p_t,\ t \in T\},$$

- $\{(a_t^*, b_t)\}_{t\in T}$ conjunto arbitrario en $X^* \times \mathbb{R}$, donde X^* denota el dual topológico de X

Caso general: X Banach arbitrario, T arbitrario
Sistema infinito parametrizado de desigualdades lineales

$$\sigma(p) := \{\langle a_t^*, x\rangle \leq b_t + p_t,\ t \in T\},$$

- $\{(a_t^*, b_t)\}_{t\in T}$ conjunto arbitrario en $X^* \times \mathbb{R}$, donde X^* denota el dual topológico de X
- Parámetro $p = (p_t)_{t\in T} \in l_\infty(T)$, $\quad \|p\| = \sup_{t\in T} |p_t|$.

Caso general: X Banach arbitrario, T arbitrario

Sistema infinito parametrizado de desigualdades lineales

$$\sigma(p) := \{\langle a_t^*, x\rangle \leq b_t + p_t,\ t \in T\},$$

- $\{(a_t^*, b_t)\}_{t\in T}$ conjunto arbitrario en $X^* \times \mathbb{R}$, donde X^* denota el dual topológico de X
- Parámetro $p = (p_t)_{t\in T} \in l_\infty(T)$, $\quad \|p\| = \sup_{t\in T} |p_t|$.
- Multifunción conjunto factible, $\mathcal{F} : l_\infty(T) \rightrightarrows X$,

$$\mathcal{F}(p) := \{x \in X : \langle a_t^*, x\rangle \leq b_t + p_t, \text{ para todo } t \in T\}.$$

- Se define la coderivada de $\mathcal{F}$ en $(0, \overline{x})$,
  $D^* \mathcal{F}(0, \overline{x}) : X^* \rightrightarrows (l_\infty(T))^*$

- Se define la coderivada de $\mathcal{F}$ en $(0, \overline{x})$, $D^*\mathcal{F}(0, \overline{x}) : X^* \rightrightarrows (l_\infty(T))^*$
- Se define la norma de la coderivada, $\|D^*\mathcal{F}(0, \overline{x})\|$

- Se define la coderivada de $\mathcal{F}$ en $(0,\overline{x})$, $D^*\mathcal{F}(0,\overline{x}) : X^* \rightrightarrows (l_\infty(T))^*$
- Se define la norma de la coderivada, $\|D^*\mathcal{F}(0,\overline{x})\|$

Teorema

Sea $\overline{x} \in \mathcal{F}(0)$. Supongamos que SSC se satisface para $p = 0$ y que $\{a_t^* \mid t \in T\}$ está acotado en X^*. Se tiene:

(i) Si $\overline{x}$ es un SS elem. para $p = 0$, $\operatorname{lip}\mathcal{F}(0,\overline{x}) = \|D^*\mathcal{F}(0,\overline{x})\| = 0$.

(ii) Si $\overline{x}$ no es un SS elemento para $p = 0$, entonces

$$\begin{aligned} \operatorname{lip}\mathcal{F}(0,\overline{x}) &= \|D^*\mathcal{F}(0,\overline{x})\| \\ &= \max\left\{ \|x^*\|^{-1} \;\middle|\; \begin{array}{l} (x^*, \langle x^*, \overline{x}\rangle) \in \\ \mathrm{cl}^*\mathrm{conv}\{(a_t^*, b_t) \mid t \in T\} \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Bibliografía básica

Análisis variacional

- D. Klatte and Kummer, *Nonsmooth Equations in Optimization. Regularity, Calculus, Methods and Applications*, Kluwer Academic Publ., Dordrecht, 2002.
- B.S. Mordukhovich*Variational Analysis and Generalized Differentiation I*, Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- R.T. Rockafellar and R.J.-B. Wets , *Variational Analysis*, Springer-Verlag, Berlín, 1998.

Análisis convexo

- R.T. Rockafellar, *Convex Analysis*, Princeton University Press, Princeton, NJ,.1970.
- C. Zălinescu, *Convex Analysis in General Vector Spaces*, World Scientific, 2002

Programación semi-infinita lineal

- M. A. Goberna and M. A. López, *Linear Semi-Infinite Optimization*, John Wiley & Sons, Chichester (UK), 1998