Programación Semi-infinita

Optimalidad y dualidad

Margarita Rodríguez Álvarez

Depto. de Estadística e Investigación Operativa
Universidad de Alicante

Seminario en Homenaje al Prof. Marco A. López

- Problema de Programación Semi-Infinita (PSI):

$$\begin{array}{lll} (P) & \text{Inf} & f(x) \\ & s.a. & g_t(x) \geq 0,\ t \in T \end{array}$$

- Problema de Programación Semi-Infinita (PSI):

$$
\begin{array}{lll}
(P) & \text{Inf} & f(x) \\
 & s.a. & g_t(x) \geq 0,\ t \in T
\end{array}
$$

  - T conjunto arbitrario (posiblemente infinito) de índices.

- Problema de Programación Semi-Infinita (PSI):

$$
\begin{array}{lll}
(P) & \text{Inf} & f(x) \\
 & s.a. & g_t(x) \geq 0, \; t \in T
\end{array}
$$

  - T conjunto arbitrario (posiblemente infinito) de índices.
  - f y g_t, $t \in T$, funciones finito valoradas definidas en $\mathbb{R}^n$.

- Problema de Programación Semi-Infinita (PSI):

$$(P) \quad \text{Inf} \quad f(x)$$
$$\quad\quad s.a. \quad g_t(x) \geq 0,\ t \in T$$

  - T conjunto arbitrario (posiblemente infinito) de índices.
  - f y g_t, $t \in T$, funciones finito valoradas definidas en $\mathbb{R}^n$.

- El *conjunto factible* de (P) se denotará por

$$F = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_t(x) \geq 0,\ t \in T\},$$

siendo (P) *consistente*, cuando $F \neq \emptyset$, e *inconsistente*, en caso contrario.

- El *valor óptimo* de (P), $v(P)$, se define como

$$\begin{cases} +\infty & \text{si } F = \emptyset, \\ \inf\{f(x) \mid x \in F\} & \text{si } \{f(x) \mid x \in F\} \text{ acotado inferiormente}, \\ -\infty & \text{si } \{f(x) \mid x \in F\} \text{ no acotado inferiormente}. \end{cases}$$

- El *valor óptimo* de (P), $v(P)$, se define como

$$\begin{cases} +\infty & \text{si } F = \emptyset, \\ \inf \{f(x) \mid x \in F\} & \text{si } \{f(x) \mid x \in F\} \text{ acotado inferiormente,} \\ -\infty & \text{si } \{f(x) \mid x \in F\} \text{ no acotado inferiormente.} \end{cases}$$

- Si $v(P) = -\infty$, se dice que (P) es *no acotado*.

- El *valor óptimo* de (P), $v(P)$, se define como

$$\begin{cases} +\infty & \text{si } F = \emptyset, \\ \inf\{f(x) \mid x \in F\} & \text{si } \{f(x) \mid x \in F\} \text{ acotado inferiormente,} \\ -\infty & \text{si } \{f(x) \mid x \in F\} \text{ no acotado inferiormente.} \end{cases}$$

- Si $v(P) = -\infty$, se dice que (P) es *no acotado*.
- Si $v(P) \in \mathbb{R}$, se dice que (P) es *acotado* y se denota por

$$F^* = \{x \in F \mid f(x) = v(P)\}$$

su *conjunto óptimo* .

- El *valor óptimo* de (P), $v(P)$, se define como

$$\begin{cases} +\infty & \text{si } F = \emptyset, \\ \inf\{f(x) \mid x \in F\} & \text{si } \{f(x) \mid x \in F\} \text{ acotado inferiormente,} \\ -\infty & \text{si } \{f(x) \mid x \in F\} \text{ no acotado inferiormente.} \end{cases}$$

- Si $v(P) = -\infty$, se dice que (P) es *no acotado*.
- Si $v(P) \in \mathbb{R}$, se dice que (P) es *acotado* y se denota por

$$F^* = \{x \in F \mid f(x) = v(P)\}$$

  su *conjunto óptimo* .
- Si (P) es acotado y $F^* \neq \emptyset$, se dice que (P) es *resoluble*.

$$
\begin{array}{lll}
(P) & \mathrm{Inf} & f(x) \\
 & s.a. & g_t(x) \geq 0, \ t \in T
\end{array}
$$

- Se dice que (P) es un Problema de Programación Semi-Infinita Convexa (PSIC) cuando la función f es convexa y, para cada $t \in T$, la función g_t es cóncava (i.e., $-g_t$ es convexa).

$$
\begin{array}{lll}
(P) & \text{Inf} & f(x) \\
 & s.a. & g_t(x) \geq 0,\ t \in T
\end{array}
$$

- Se dice que (P) es un Problema de Programación Semi-Infinita Convexa (PSIC) cuando la función f es convexa y, para cada $t \in T$, la función g_t es cóncava (i.e., $-g_t$ es convexa).
- En el caso particular de que f y g_t, $t \in T$, sean afines, se dice que (P) es un Problema de Programación Semi-Infinita Lineal (PSIL), siendo de Programación Lineal (PL) cuando T es finito.

$$
\begin{array}{lll}
(P) & \text{Inf} & c'x \\
 & s.a. & a_t'x \geq b_t,\ t \in T
\end{array}
$$

Definition

Un par de problemas de optimización

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \text{Inf} & f(x) \\ s.a. & x \in F \end{array} \qquad y \qquad (D) \quad \begin{array}{ll} \text{Sup} & g(y) \\ s.a & y \in G \end{array}$$

forman un **par dual** cuando se cumple el teorema de dualidad débil, $v(D) \leq v(P)$. El par dual $(P) - (D)$ satisface el teorema de dualidad fuerte cuando $v(D) = v(P)$.

Definition

Un par de problemas de optimización

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \text{Inf} & f(x) \\ s.a. & x \in F \end{array} \qquad y \qquad (D) \quad \begin{array}{ll} \text{Sup} & g(y) \\ s.a & y \in G \end{array}$$

forman un **par dual** cuando se cumple el teorema de dualidad débil, $v(D) \leq v(P)$. El par dual $(P) - (D)$ satisface el teorema de dualidad fuerte cuando $v(D) = v(P)$.

- Convenimos en llamar problema primal a (P) y problema dual a (D).

Definition

Un par de problemas de optimización

$$(P)\quad \begin{array}{ll} \text{Inf} & f(x) \\ s.a. & x \in F \end{array} \qquad y \qquad (D)\quad \begin{array}{ll} \text{Sup} & g(y) \\ s.a & y \in G \end{array}$$

forman un **par dual** cuando se cumple el teorema de dualidad débil, $v(D) \leq v(P)$. El par dual $(P) - (D)$ satisface el teorema de dualidad fuerte cuando $v(D) = v(P)$.

- Convenimos en llamar problema primal a (P) y problema dual a (D).
- La correspondiente teoría de la dualidad se centra en establecer condiciones bajo las cuales se cumple el teorema de dualidad fuerte.

- En PSIL, consideramos el problema primal de la forma

$$
\begin{array}{lll}
(P) & \text{Inf} & c'x \\
 & s.a. & a_t'x \geq b_t,\ t \in T.
\end{array}
$$

- En PSIL, consideramos el problema primal de la forma

$$\begin{array}{lll} (P) & \text{Inf} & c'x \\ & s.a. & a_t' x \geq b_t,\ t \in T. \end{array}$$

- Denotamos por $\mathbb{R}^{(T)}$, el conjunto de todas las funciones $\lambda : T \longrightarrow \mathbb{R}$ que sólo toman valores no nulos en un subconjunto finito de T.

- En PSIL, consideramos el problema primal de la forma

$$\begin{array}{lll}(P) & \mathrm{Inf} & c'x \\ & s.a. & a_t'x \geq b_t,\ t \in T.\end{array}$$

- Denotamos por $\mathbb{R}^{(T)}$, el conjunto de todas las funciones $\lambda : T \longrightarrow \mathbb{R}$ que sólo toman valores no nulos en un subconjunto finito de T.
- $\mathbb{R}^{(T)}$ es el espacio vectorial de las sucesiones finitas generalizadas.

- En PSIL, consideramos el problema primal de la forma

$$(P)\quad \begin{array}{ll} \text{Inf} & c'x \\ s.a. & a_t'x \geq b_t,\ t \in T. \end{array}$$

- Denotamos por $\mathbb{R}^{(T)}$, el conjunto de todas las funciones $\lambda : T \longrightarrow \mathbb{R}$ que sólo toman valores no nulos en un subconjunto finito de T.
- $\mathbb{R}^{(T)}$ es el espacio vectorial de las sucesiones finitas generalizadas.
- Denotamos por $\mathbb{R}_+^{(T)} := \left\{\lambda \in \mathbb{R}^{(T)} \mid \lambda_t \geq 0,\ \forall t \in T\right\}$.

- En PSIL, consideramos el problema primal de la forma

$$\begin{array}{lll} (P) & \mathrm{Inf} & c'x \\ & s.a. & a_t'x \geq b_t,\ t \in T. \end{array}$$

- Denotamos por $\mathbb{R}^{(T)}$, el conjunto de todas las funciones $\lambda : T \to \mathbb{R}$ que sólo toman valores no nulos en un subconjunto finito de T.
- $\mathbb{R}^{(T)}$ es el espacio vectorial de las sucesiones finitas generalizadas.
- Denotamos por $\mathbb{R}_+^{(T)} := \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^{(T)} \mid \lambda_t \geq 0,\ \forall t \in T \right\}$.
- Si $\lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}$ satisface $\sum_{t\in T} \lambda_t a_t = c$ entonces, para todo $x \in F$,

$$c'x = \sum_{t\in T} \lambda_t a_t' x \geq \sum_{t\in T} \lambda_t b_t$$

$$v(P) = \inf \left\{ c'x \mid x \in F \right\} \geq \sum_{t\in T} \lambda_t b_t.$$

- Se define un problema dual para (P) consistente en maximizar el funcional lineal sobre $\mathbb{R}^{(T)}$, definido por $\Psi(\lambda) = \sum_{t \in T} \lambda_t b_t$ sobre

$$\Lambda = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)} \mid \sum_{t \in T} \lambda_t a_t = c \right\}.$$

- Se define un problema dual para (P) consistente en maximizar el funcional lineal sobre $\mathbb{R}^{(T)}$, definido por $\Psi(\lambda) = \sum_{t \in T} \lambda_t b_t$ sobre

$$\Lambda = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)} \mid \sum_{t \in T} \lambda_t a_t = c \right\}.$$

- El problema dual (en el sentido de Haar) será

$$\begin{array}{lll} (D) & \text{Sup} & \Psi(\lambda) = \sum_{t \in T} \lambda_t b_t \\ & s.a. & \sum_{t \in T} \lambda_t a_t = c, \\ & & \lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}. \end{array}$$

- Se define un problema dual para (P) consistente en maximizar el funcional lineal sobre $\mathbb{R}^{(T)}$, definido por $\Psi(\lambda) = \sum_{t \in T} \lambda_t b_t$ sobre

$$\Lambda = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)} \mid \sum_{t \in T} \lambda_t a_t = c \right\}.$$

- El problema dual (en el sentido de Haar) será

$$\begin{array}{lll} (D) & \text{Sup} & \Psi(\lambda) = \sum_{t \in T} \lambda_t b_t \\ & s.a. & \sum_{t \in T} \lambda_t a_t = c, \\ & & \lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}. \end{array}$$

- Por construcción, se satisface el teorema de dualidad débil, $v(D) \leq v(P)$.

- Consideramos el par dual $(P)-(D)$

$$(P) \quad \text{Inf} \quad c'x \qquad \text{s.a.} \quad a_t'x \geq b_t,\ t \in T$$

$$(D) \quad \text{Sup} \quad \Psi(\lambda) = \sum_{t \in T} \lambda_t b_t \qquad \text{s.a.} \quad \sum_{t \in T} \lambda_t a_t = c, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}$$

- Consideramos el par dual $(P) - (D)$

$$(P) \quad \mathrm{Inf} \quad c'x \qquad s.a. \quad a_t'x \geq b_t,\ t \in T$$

$$(D) \quad \mathrm{Sup} \quad \Psi(\lambda) = \sum_{t \in T} \lambda_t b_t \qquad s.a. \quad \sum_{t \in T} \lambda_t a_t = c, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}$$

- Denotamos por Λ el conjunto factible de (D) y definimos $v(D) = -\infty$ cuando $\Lambda = \emptyset$.

- Consideramos el par dual $(P) - (D)$

$$
\begin{array}{llll}
(P) & \text{Inf} & c'x \\
 & s.a. & a_t'x \geq b_t,\ t \in T
\end{array}
\qquad
\begin{array}{llll}
(D) & \text{Sup} & \Psi(\lambda) = \sum_{t \in T} \lambda_t b_t \\
 & s.a. & \sum_{t \in T} \lambda_t a_t = c \\
 & & \lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}
\end{array}
$$

- Denotamos por Λ el conjunto factible de (D) y definimos $v(D) = -\infty$ cuando $\Lambda = \emptyset$.

- Denotaremos por $\delta(P, D) := v(P) - v(D)$ el salto de dualidad del par dual $(P) - (D)$.

- Consideramos el par dual $(P)-(D)$

$$
(P)\quad \begin{array}{ll} \text{Inf} & c'x \\ s.a. & a_t'x \geq b_t,\ t \in T \end{array}
\qquad\qquad
(D)\quad \begin{array}{ll} \text{Sup} & \Psi(\lambda) = \sum_{t\in T} \lambda_t b_t \\ s.a. & \sum_{t\in T} \lambda_t a_t = c \\ & \lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)} \end{array}
$$

- Denotamos por Λ el conjunto factible de (D) y definimos $v(D) = -\infty$ cuando $\Lambda = \emptyset$.

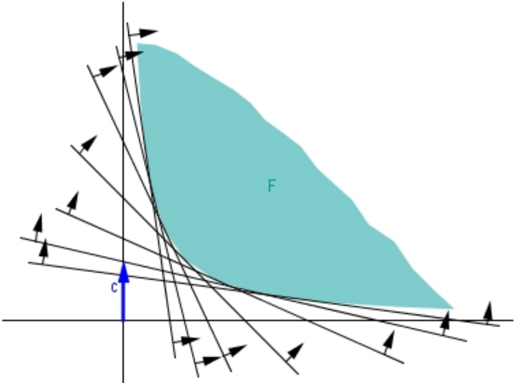
- Denotaremos por $\delta(P,D) := v(P) - v(D)$ el salto de dualidad del par dual $(P)-(D)$.

- Cuando T es finito, (D) coincide con el problema dual (en el sentido de Haar) de un problema de PL en forma canónica.

- En PL, los problemas acotados siempre son resolubles.

- En PL, los problemas acotados siempre son resolubles.
- En PSIL, existen problemas acotados no resolubles:

$$
\begin{array}{lll}
(P) & \text{Inf} & x_2 \\
 & s.a & x_1 + t^2 x_2 \geq 2t,\ t \in \,]0, +\infty[
\end{array}
$$



Theorem (de dualidad en PL)

Siempre que al menos uno de los problemas en el par dual $(P)-(D)$ sea consistente, $v(P)=v(D)$. Además, si uno de ellos es acotado, ambos problemas son resolubles.

Diagrama de dualidad en PL:

$v(P)$ / $v(D)$	IC $(+\infty)$	B	UB $(-\infty)$
IC $(-\infty)$	$+\infty$	x	0
B	x	0	x
UB $(+\infty)$	0	x	x

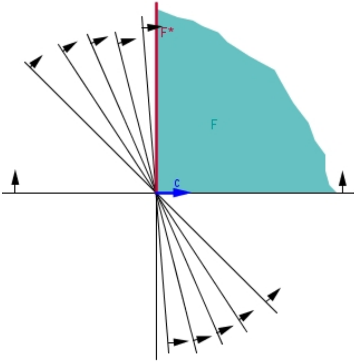
Diagrama de dualidad en PSIL:

$v(D)$ \ $v(P)$	IC $(+\infty)$	B	UB $(-\infty)$
IC $(-\infty)$	$+\infty$	$+\infty$	0
B	$+\infty$	$\delta(P,D) \geq 0$	x
UB $(+\infty)$	0	x	x

Example ((P) acotado y (D) inconsistente)

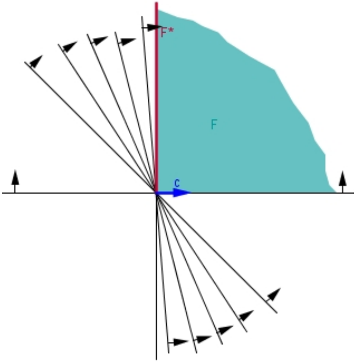
$$
\begin{array}{lll}
(P) & \text{Inf} & x_1 \\
 & s.a & (1-t)\,x_1 + t x_2 \geq 0,\ t \in \,]0,1]
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
(P) & \text{Inf} & x_1 \\
 & s.a & (1-t)\,x_1 + t x_2 \geq 0, \\
 & & t \in \,]0,1]
\end{array}
$$



- (P) es resoluble y $v(P) = 0$.

$$
\begin{array}{lll}
(P) & \text{Inf} & x_1 \\
 & s.a & (1-t)\,x_1 + t x_2 \geq 0, \\
 & & t \in \,]0,1]
\end{array}
$$



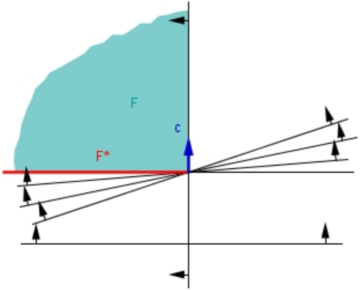
- (P) es resoluble y $v\,(P) = 0$.

- (D) es inconsistente ya que

$$
\Lambda = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)} \mid \sum_{t \in]0,1]} \lambda_t \begin{pmatrix} 1-t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \emptyset.
$$

Example ((P) y (D) acotados con $\delta(P,D) > 0$.)

$$
\begin{array}{lll}
(P) & \text{Inf} & x_2 \\
 & s.a & -x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq -1 \\
 & & -r^{-1}x_1 + x_2 \geq 0, \quad r = 3, 4, \ldots
\end{array}
$$



- (P) es resoluble y $v(P) = 0$.

$$
\begin{array}{lll}
(P) & \text{Inf} & x_2 \\
 & s.a & -x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq -1 \\
 & & -r^{-1}x_1 + x_2 \geq 0, \quad r = 3, 4, \ldots
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
(D) & \text{Sup} & -\lambda_2 \\
 & s.a. & \lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \sum_{r=3}^{\infty} \lambda_r \begin{pmatrix} -r^{-1} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 & & \lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}
\end{array}
$$

- La única solución factible de (D) es $\overline{\lambda} \in \mathbb{R}_+^{(T)}$ tal que $\overline{\lambda}_2 = 1$ y $\overline{\lambda}_r = 0,\ \forall r \neq 2$.

$$
\begin{array}{lll}
(P) & \text{Inf} & x_2 \\
 & s.a & -x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq -1 \\
 & & -r^{-1}x_1 + x_2 \geq 0, \quad r = 3, 4, \ldots
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
(D) & \text{Sup} & -\lambda_2 \\
 & s.a. & \lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \sum_{r=3}^{\infty} \lambda_r \begin{pmatrix} -r^{-1} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 & & \lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}
\end{array}
$$

- La única solución factible de (D) es $\overline{\lambda} \in \mathbb{R}_+^{(T)}$ tal que $\overline{\lambda}_2 = 1$ y $\overline{\lambda}_r = 0, \ \forall r \neq 2$.
- (D) es resoluble y $v(D) = -1$.

$$
\begin{array}{lll}
(P) & \text{Inf} & x_2 \\
 & s.a & -x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq -1 \\
 & & -r^{-1}x_1 + x_2 \geq 0, \quad r = 3, 4, \ldots
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
(D) & \text{Sup} & -\lambda_2 \\
 & s.a. & \lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \sum_{r=3}^{\infty} \lambda_r \begin{pmatrix} -r^{-1} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 & & \lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}
\end{array}
$$

- La única solución factible de (D) es $\overline{\lambda} \in \mathbb{R}_+^{(T)}$ tal que $\overline{\lambda}_2 = 1$ y $\overline{\lambda}_r = 0, \ \forall r \neq 2$.
- (D) es resoluble y $v(D) = -1$.
- $\delta(P, D) = v(P) - v(D) = 0 - (-1) = 1 > 0$.

Optimalidad

- En PL, dado $\overline{x} \in F$, se cumple:

Optimalidad

- En PL, dado $\overline{x} \in F$, se cumple:
  1. $\overline{x} \in F^* \Leftrightarrow$ existe $\overline{\lambda} \in \Lambda$ tal que $\overline{\lambda}_t \left(a_t' \overline{x} - b_t \right) = 0$, $\forall t \in T$ (condición de complementariedad);

Optimalidad

- En PL, dado $\overline{x} \in F$, se cumple:
  1. $\overline{x} \in F^* \Leftrightarrow$ existe $\overline{\lambda} \in \Lambda$ tal que $\overline{\lambda}_t \left(a_t' \overline{x} - b_t \right) = 0$, $\forall t \in T$ (condición de complementariedad);
  2. $\overline{x} \in F^* \Leftrightarrow c \in A \left(\overline{x} \right)$ (condición de Karush-Kuhn-Tucker, KKT).

Optimalidad

- En PL, dado $\overline{x} \in F$, se cumple:
  1. $\overline{x} \in F^* \Leftrightarrow$ existe $\overline{\lambda} \in \Lambda$ tal que $\overline{\lambda}_t \left(a_t' \overline{x} - b_t \right) = 0$, $\forall t \in T$ (condición de complementariedad);
  2. $\overline{x} \in F^* \Leftrightarrow c \in A\left(\overline{x}\right)$ (condición de Karush-Kuhn-Tucker, KKT).
- En PSIL, pueden existir soluciones óptimas en las que no se cumplen las condiciones anteriores:

Optimalidad

- En PL, dado $\overline{x} \in F$, se cumple:
  1. $\overline{x} \in F^* \Leftrightarrow$ existe $\overline{\lambda} \in \Lambda$ tal que $\overline{\lambda}_t \left(a_t' \overline{x} - b_t\right) = 0$, $\forall t \in T$ (condición de complementariedad);
  2. $\overline{x} \in F^* \Leftrightarrow c \in A\left(\overline{x}\right)$ (condición de Karush-Kuhn-Tucker, KKT).

- En PSIL, pueden existir soluciones óptimas en las que no se cumplen las condiciones anteriores:

Example (No se cumple la condición de complementariedad)

$$
\begin{array}{lll}
(P) & \operatorname{Inf} & x_2 \\
 & s.a & -x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq -1 \\
 & & -r^{-1} x_1 + x_2 \geq 0, \quad r = 3, 4, \ldots
\end{array}
$$

Optimalidad

- En PL, dado $\overline{x} \in F$, se cumple:
  1. $\overline{x} \in F^* \Leftrightarrow$ existe $\overline{\lambda} \in \Lambda$ tal que $\overline{\lambda}_t \left(a_t' \overline{x} - b_t \right) = 0$, $\forall t \in T$ (condición de complementariedad);
  2. $\overline{x} \in F^* \Leftrightarrow c \in A\left(\overline{x}\right)$ (condición de Karush-Kuhn-Tucker, KKT).

- En PSIL, pueden existir soluciones óptimas en las que no se cumplen las condiciones anteriores:

Example (No se cumple la condición de complementariedad)

$$\begin{array}{lll} (P) & \text{Inf} & x_2 \\ & s.a & -x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq -1 \\ & & -r^{-1}x_1 + x_2 \geq 0, \quad r = 3, 4, \ldots \end{array}$$

- $\forall \overline{x} \in F^*$, $\overline{x}_2 = 0 > -1$.

Optimalidad

- En PL, dado $\overline{x} \in F$, se cumple:
  1. $\overline{x} \in F^* \Leftrightarrow$ existe $\overline{\lambda} \in \Lambda$ tal que $\overline{\lambda}_t \left(a_t' \overline{x} - b_t\right) = 0$, $\forall t \in T$ (condición de complementariedad);
  2. $\overline{x} \in F^* \Leftrightarrow c \in A\left(\overline{x}\right)$ (condición de Karush-Kuhn-Tucker, KKT).

- En PSIL, pueden existir soluciones óptimas en las que no se cumplen las condiciones anteriores:

Example (No se cumple la condición de complementariedad)

$$\begin{array}{lll} (P) & \text{Inf} & x_2 \\ & s.a & -x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq -1 \\ & & -r^{-1}x_1 + x_2 \geq 0, \quad r = 3, 4, \ldots \end{array}$$

- $\forall \overline{x} \in F^*$, $\overline{x}_2 = 0 > -1$.
- La única solución factible del dual, $\overline{\lambda} \in \mathbb{R}_+^{(T)}$, tiene $\overline{\lambda}_2 = 1$.

- En PL, dado $\overline{x} \in F$, se cumple:
    1. $\overline{x} \in F^* \Leftrightarrow$ existe $\overline{\lambda} \in \Lambda$ tal que $\overline{\lambda}_t \left(a_t' \overline{x} - b_t \right) = 0$, $\forall t \in T$ (condición de complementariedad);
    2. $\overline{x} \in F^* \Leftrightarrow c \in A\left(\overline{x}\right)$ (condición de Karush-Kuhn-Tucker, KKT).
- En PSIL, pueden existir soluciones óptimas en las que no se cumplen las condiciones anteriores:

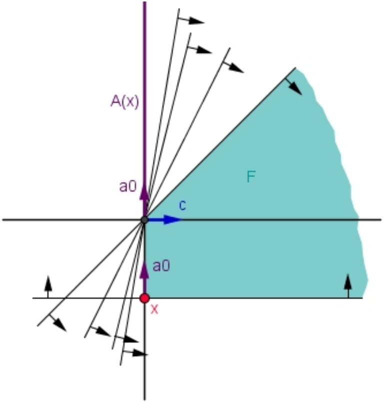
Example (No se cumple la condición de complementariedad)

$$
\begin{array}{lll}
(P) & \operatorname{Inf} & x_2 \\
 & s.a & -x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq -1 \\
 & & -r^{-1} x_1 + x_2 \geq 0, \quad r = 3, 4, \ldots
\end{array}
$$

- $\forall \overline{x} \in F^*$, $\overline{x}_2 = 0 > -1$.
- La única solución factible del dual, $\overline{\lambda} \in \mathbb{R}_+^{(T)}$, tiene $\overline{\lambda}_2 = 1$.
- $\overline{\lambda}_2 \left(\overline{x}_2 + 1 \right) > 0$ y no se cumple la condición de complementariedad.

Example (No se cumple la condición KKT)

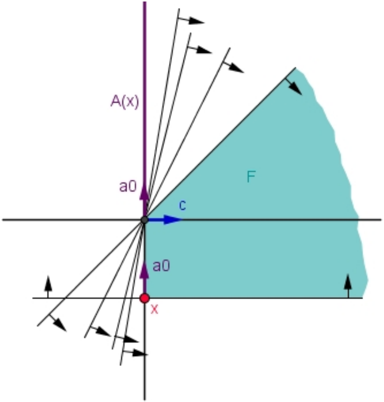
$$
\begin{array}{lll}
(P) & \text{Inf} & x_1 \\
 & s.a & x_2 \geq -1 \\
 & & tx_1 - x_2 \geq 0, \quad t = 1, 2, \ldots
\end{array}
$$



- $x = (0, -1)' \in F^*$.

Example (No se cumple la condición KKT)

$$
\begin{array}{lll}
(P) & \text{Inf} & x_1 \\
 & s.a & x_2 \geq -1 \\
 & & t x_1 - x_2 \geq 0, \quad t = 1, 2, \ldots
\end{array}
$$



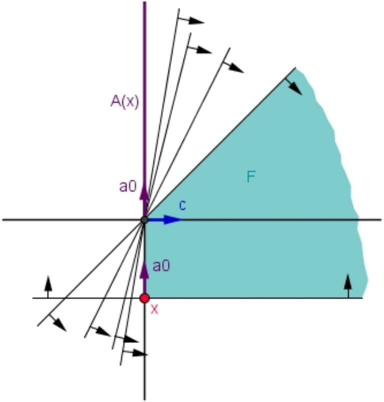
- $x = (0, -1)' \in F^*$.
- $x_2 \geq -1$ es la única restricción activa en x, por lo que

$$
A(x) = \text{cone}\left\{(0,1)'\right\}.
$$

Optimalidad

Example (No se cumple la condición KKT)

$$\begin{array}{lll} (P) & \text{Inf} & x_1 \\ & s.a & x_2 \geq -1 \\ & & tx_1 - x_2 \geq 0, \quad t = 1, 2, \ldots \end{array}$$



- $x = (0, -1)' \in F^*$.
- $x_2 \geq -1$ es la única restricción activa en x, por lo que

$$A(x) = \text{cone}\left\{(0,1)'\right\}.$$

- $c = (1, 0)' \notin A(x)$.

Optimalidad

En PSIL,

Theorem

Dado $\overline{x} \in F$, *las siguientes afirmaciones son condiciones suficientes para que* $\overline{x} \in F^*$*:*

1. *Existe* $\overline{\lambda} \in \Lambda$ *tal que* $\overline{\lambda}_t \left(a_t' \overline{x} - b_t \right) = 0$, $\forall t \in T$ *(condición de complementariedad);*
2. $c \in A\left(\overline{x}\right)$ *(condición de KKT);*
3. $c \in \operatorname{cl} A\left(\overline{x}\right)$;
4. *Existe* $\overline{\lambda} \in \mathbb{R}_+^{(T)}$ *tal que* $L\left(\overline{x}, \lambda\right) \leq L\left(\overline{x}, \overline{\lambda}\right) \leq L\left(x, \overline{\lambda}\right)$ *para todo* $x \in \mathbb{R}^n$ *y para todo* $\lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}$, *donde* $L\left(x, \lambda\right)$ *es la función Lagrangiana*
$$L\left(x, \lambda\right) = c'x + \sum_{t \in T} \lambda_t \left(b_t - a_t' x \right).$$

Además, si (P) *es LFM, son también condiciones necesarias.*

Dualidad

Theorem

Dado el par dual $(P)-(D)$, *con* (P) *consistente, se cumple:*

1. *Si* $c \in \operatorname{rint}(M)$, (P) *es resoluble y* $\delta(P,D)=0$.
2. *Si* $c \in \operatorname{rbd}(M)$, $\delta(P,D)=0$ *si, y sólo si,* $\operatorname{cl}\left[\left(\{c\}\times\mathbb{R}\right)\cap K\right]=\left(\{c\}\times\mathbb{R}\right)\cap \operatorname{cl}(K)$.
3. *Si* $c \notin \operatorname{cl}(M)$, (P) *es no acotado y* $\delta(P,D)=0$.

Corollary

Dado el par dual $(P)-(D)$, *si* (P) *es FM,* $\delta(P,D)=0$.

Referencias

- M.A. Goberna, M.A. López and J. Pastor, Farkas-Minkowski Systems in Semi-Infinite Programming, Applied Mathematics and Optimization, 7, 297-308, 1980.

Referencias

- M.A. Goberna, M.A. López and J. Pastor, Farkas-Minkowski Systems in Semi-Infinite Programming, Applied Mathematics and Optimization, 7, 297-308, 1980.
- M.A. López and E. Vercher, Optimality conditions for non-differentiable convex semi-infinite programming, Mathematical Programming 27, 307-319, 1983.

Referencias

- M.A. Goberna, M.A. López and J. Pastor, Farkas-Minkowski Systems in Semi-Infinite Programming, Applied Mathematics and Optimization, 7, 297-308, 1980.
- M.A. López and E. Vercher, Optimality conditions for non-differentiable convex semi-infinite programming, Mathematical Programming 27, 307-319, 1983.
- M.A. Goberna and M.A. López, Optimal Value Function in Semi-Infinite Programming, Journal of Optimization Theory and Applications, 59, 261-279, 1988.

Referencias

- M.A. Goberna, M.A. López and J. Pastor, Farkas-Minkowski Systems in Semi-Infinite Programming, Applied Mathematics and Optimization, 7, 297-308, 1980.
- M.A. López and E. Vercher, Optimality conditions for non-differentiable convex semi-infinite programming, Mathematical Programming 27, 307-319, 1983.
- M.A. Goberna and M.A. López, Optimal Value Function in Semi-Infinite Programming, Journal of Optimization Theory and Applications, 59, 261-279, 1988.
- M.A. Goberna and M.A. López, Conditions for the Uniqueness of the Optimal Solution in Linear Semi-Infinite Programming, Journal of Optimization Theory and Applications, 72, 225-246, 1992.

Referencias

- M.A. Goberna, M.A. López and J. Pastor, Farkas-Minkowski Systems in Semi-Infinite Programming, Applied Mathematics and Optimization, 7, 297-308, 1980.
- M.A. López and E. Vercher, Optimality conditions for non-differentiable convex semi-infinite programming, Mathematical Programming 27, 307-319, 1983.
- M.A. Goberna and M.A. López, Optimal Value Function in Semi-Infinite Programming, Journal of Optimization Theory and Applications, 59, 261-279, 1988.
- M.A. Goberna and M.A. López, Conditions for the Uniqueness of the Optimal Solution in Linear Semi-Infinite Programming, Journal of Optimization Theory and Applications, 72, 225-246, 1992.
- M.A. Goberna, M.A. López and M. Todorov, Unicity in Linear Optimization, Journal of Optimization Theory and Applications, 86, 37-56, 1995.

Referencias

- M.A. Goberna and M.A. López, Optimality Theory for Semi-Infinite Linear Programming, Numerical Functional Analysis and Optimization, 16, 669-700, 1995.

Referencias

- M.A. Goberna and M.A. López, Optimality Theory for Semi-Infinite Linear Programming, Numerical Functional Analysis and Optimization, 16, 669-700, 1995.
- M.A. Goberna and M.A. López, Linear Semi-Infinite Optimization, John Wiley and Sons, Chichester, England, 1998.

Referencias

- M.A. Goberna and M.A. López, Optimality Theory for Semi-Infinite Linear Programming, Numerical Functional Analysis and Optimization, 16, 669-700, 1995.
- M.A. Goberna and M.A. López, Linear Semi-Infinite Optimization, John Wiley and Sons, Chichester, England, 1998.
- M.A. Goberna and M.A. López, On Duality in Semi-Infinite Programming and Existence Theorems for Linear Inequalities, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 230, 173-192, 1999.

Referencias

- M.A. Goberna and M.A. López, Optimality Theory for Semi-Infinite Linear Programming, Numerical Functional Analysis and Optimization, 16, 669-700, 1995.
- M.A. Goberna and M.A. López, Linear Semi-Infinite Optimization, John Wiley and Sons, Chichester, England, 1998.
- M.A. Goberna and M.A. López, On Duality in Semi-Infinite Programming and Existence Theorems for Linear Inequalities, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 230, 173-192, 1999.
- M.D. Fajardo and M.A. López, Locally Farkas Minkowski Systems in Convex Semi-Infinite Programming, Journal of Optimization Theory and Applications, 103, 313-335, 1999.